詳細解答

STEP I 1991，第 10 題

力學 • 懸鏈的平衡

STEP I 1991，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s1-q10

本題在 *Beyond STEP* 第 11.14 節是拋物線，不是懸鏈線中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch11/bridge-parabola.html

關鍵思路

鏈上每一個接點都在三個力的作用下處於平衡（equilibrium）：相鄰兩節鏈的張力（tension），以及掛在該接點上的重量 w。沿水平方向分解力（resolving），可知每一節鏈的張力都有相同的水平分量。再沿豎直方向分解，可知每經過一個接點，豎直分量恰好減少 w；由於水平間距固定，各節鏈的斜率便構成一個等差數列（arithmetic progression）。斜率成等差數列，正是拋物線（parabola）在離散情況下的標記。

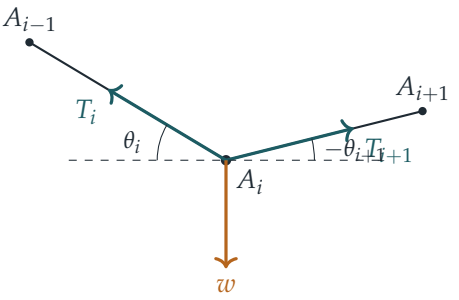
解答

平衡方程

把鏈視為輕、柔軟而且不可伸長（light, flexible and inextensible）的模型，因此每一節鏈 $A_{i-1}A_i$ 的張力都沿着該節鏈的方向。設 θ_i 為 $A_{i-1}A_i$ 與水平線所成的角，沿 x 增加的方向向下量度，所以

$$\tan\theta_i = \frac{y_{i-1} - y_i}{h}.$$

（在橋的右半邊，θ_i 是負數；以下的論證全都不受其正負號影響。）接點 A_i 受三個力作用：沿 A_iA_{i-1} 方向的 T_i、沿 A_iA_{i+1} 方向的 T_{i+1}，以及吊桿向下的拉力 w。



在 A_i 沿水平和豎直方向分解力，對 $1 \le i \le n+1$（其實對所有 $1 \le i \le 2n+1$ 都成立）：

$$T_i \cos\theta_i = T_{i+1}\cos\theta_{i+1},$$
$$T_i \sin\theta_i - T_{i+1}\sin\theta_{i+1} = w.$$

這就是題目要求的方程。

各個比

第一條方程說明 $T_i\cos\theta_i$ 對每一節鏈都相同；把這個共同的水平分量記作 H。它是正數，因為鏈只能拉、不能推。把第二條方程除以 H，並利用 $\tan\theta_i = (y_{i-1}-y_i)/h$，得

$$\frac{H}{h}(y_{i-1}-y_i) - \frac{H}{h}(y_i - y_{i+1}) = w.$$

因此，若以 $V_i = H(y_{i-1}-y_i)/h$ 表示第 i 節鏈張力的豎直分量，則

$$V_i - V_{i+1} = w \quad (1 \le i \le 2n+1), \qquad \text{所以} \qquad V_i = V_1 - (i-1)w \quad (1 \le i \le 2n+2).$$

想一想 現在只剩下一個未知數 V_1。橋的哪一項條件可以把它確定下來？

兩個支點的高度相同。把整條鏈上各節的下降量加起來，

$$0 = y_0 - y_{2n+2} = \sum_{i=1}^{2n+2}(y_{i-1}-y_i) = \frac{h}{H}\sum_{i=1}^{2n+2} V_i$$
$$= \frac{h}{H}\Big[(2n+2)V_1 - w\big(0+1+\cdots+(2n+1)\big)\Big].$$

方括號內的式子是 $(2n+2)V_1 - w(2n+1)(n+1)$，所以 $V_1 = \frac{1}{2}(2n+1)w$。（整體的豎直平衡也指向同一結果：兩個支點平均分擔總負載 $(2n+1)w$。）因此

$$V_i = \tfrac{1}{2}(2n+3-2i)\,w, \qquad \text{即} \qquad y_{i-1}-y_i = \frac{(2n+3-2i)\,wh}{2H}.$$

取 $i = n+1, n, \ldots, 1$，得到的下降量依次是 $wh/(2H)$ 的 $1, 3, \ldots, 2n+1$ 倍：

$$\frac{h}{y_n - y_{n+1}} = \frac{3h}{y_{n-1}-y_n} = \cdots = \frac{(2n+1)h}{y_0 - y_1} = \frac{2H}{w},$$

這就是所要求的一連串等式。（試卷上最後一個分子印作 $(2n+1)y$；它必定是 $(2n+1)h$，這既符合前面各項的規律，也只有這樣，該比才會像其他各個比一樣是無量綱的。）

拋物線

設 $k = wh/(2H)$。從 A_0 起把下降量加起來，

$$y_i = y_0 - k\sum_{j=1}^{i}(2n+3-2j) = y_0 - k\big[(2n+3)i - i(i+1)\big] = y_0 - k\,i\,(2n+2-i).$$

記 $m = n+1$，則 $i(2m-i) = m^2 - (i-m)^2$，所以

$$y_i = (y_0 - km^2) + k(i-m)^2 = y_{n+1} + k(i-n-1)^2,$$

這是因為代入 $i = m$ 可知 $y_0 - km^2 = y_{n+1}$。現在 $x_i = x_0 + ih$，所以 $(i-n-1)h = x_i - x_{n+1}$，於是每一點 A_i（$0 \le i \le 2n+2$）都滿足

$$y = y_{n+1} + \frac{w}{2Hh}\,(x - x_{n+1})^2.$$

這是同一條拋物線，其豎直的對稱軸通過最低點 A_{n+1}，所以 $A_0, A_1, \ldots, A_{2n+2}$ 各點全都在這條拋物線上。兩個端點也包括在內：$i = 0$ 和 $i = 2n+2$ 都給出 y_0，正如所料。

驗算

- 當 $n = 0$ 時，只有正中間的一根吊桿：公式給出 $V_1 = \frac{1}{2}w$，即鏈的每一半各承擔一半負載，這顯然是應有的結果。
- 這個結果與連續的情況吻合：一條水平張力為 H 的纜索，掛上每單位水平長度為 w/h 的均勻負載，會有 $y'' = (w/h)/H$，而我們的拋物線正有 $y'' = w/(Hh)$。
- 我們做了一次數值檢驗：隨機選取 200 座橋（$1 \le n \le 8$，H、w、h 隨機選取），以精確分數把各接點的方程當作線性方程組直接求解，並確認了各個比、公式 $y_i = y_0 - k\,i(2n+2-i)$、拋物線，以及每個接點上完整的力平衡。例如當 $n=2$、$w=2$、$H=5$、$h=1$ 時，下行一段的下降量依次為 1.0, 0.6, 0.2，而每個比都等於 $2H/w = 5$。

常見錯誤

- 不加說明便以對稱為由斷言 $y_n = y_{n+2}$。這是對的，但它是由兩個支點等高推出來的；上面的求和論證是把它證明出來，而不是假設它成立。
- 忘記張力的水平分量是常數，而嘗試逐一求出每個 T_i。本題從頭到尾都不需要 T_i 本身（它們等於 $\sqrt{H^2 + V_i^2}$）。

► 在鏈上升的那一半弄錯 θ_i 的正負號。全程使用 $\tan\theta_i = (y_{i-1} - y_i)/h$ 便可避免這個問題。

STEP 之外

只受自身重量而懸垂的鏈會形成懸鏈線（catenary）$y = c\cosh(x/c)$；但若鏈所承受的負載是沿水平方向均勻分佈的，例如橋面，則會形成拋物線。本題正是這個事實的離散版本。二階差分方程 $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} =$ 常數 是 $y'' =$ 常數 的有限差分（finite difference）形式，而微分方程（differential equations）的數值方法也建基於同一想法。變分法（calculus of variations）處理的正是懸鏈線及與之相關的曲線。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對繩和纜索的靜力學有嚴謹細緻的處理，很值得一讀。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。