詳細解答

STEP I 1991，第 1 題

純數學 • 三角恆等式

> **STEP I 1991，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q1

關鍵思路

角度所滿足的條件讓我們可以消去其中一個角：由於 $\psi = \frac{1}{2}\pi - (\theta + \phi)$，我們有 $\sin\psi = \cos(\theta + \phi)$，於是該恆等式（identity）便成為一個關於兩個自由角的命題。其後，乘積 $\sin\theta\sin\phi$ 與 $\cos(\theta + \phi)$ 結合起來得出 $\cos(\theta - \phi)$，而乘積 $\cos(\theta + \phi)\cos(\theta - \phi)$ 的形式十分簡潔。至於第二部分，所選的特殊角令 ψ 等於 θ 的一半，有關 $\frac{1}{10}\pi$ 的資料正是由此而來。

解答

恆等式

由於 $\theta + \phi + \psi = \frac{1}{2}\pi$，

$$\sin\psi = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - (\theta + \phi)) = \cos(\theta + \phi).$$

因此恆等式的左方是

$$L = \sin^2\theta + \sin^2\phi + \cos(\theta + \phi)[\cos(\theta + \phi) + 2\sin\theta\sin\phi].$$

在括號之內，$\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$，所以

$$\cos(\theta + \phi) + 2\sin\theta\sin\phi = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = \cos(\theta - \phi).$$

現在我們需要乘積 $\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi)$。把複角公式（compound-angle formulae）乘開，

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi) &= (\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)(\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi)\\ &= \cos^2\theta\cos^2\phi-\sin^2\theta\sin^2\phi\\ &= \cos^2\theta\,(1-\sin^2\phi)-(1-\cos^2\theta)\sin^2\phi\\ &= \cos^2\theta-\sin^2\phi.\end{aligned}$$

因此

$$L=\sin^2\theta+\sin^2\phi+\cos^2\theta-\sin^2\phi=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

這就是所需的恆等式。

$\sin\frac{1}{10}\pi$ 所滿足的三次方程

取 $\theta=\phi=\frac{1}{5}\pi$。那麼 $\psi=\frac{1}{2}\pi-\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{10}\pi$。設

$$x=\sin\tfrac{1}{10}\pi,\qquad s=\sin\tfrac{1}{5}\pi.$$

由恆等式得

$$2s^2+x^2+2s^2x=1,\qquad \text{即}\qquad 2s^2(1+x)=1-x^2. \tag{$*$}$$

> **想一想** 為甚麼不直接利用 $\sin\psi=\cos 2\theta=1-2s^2$ 來消去 s？

這個關係式對每一個滿足 $\psi=\frac{1}{2}\pi-2\theta$ 的 θ 都成立，所以把 $s^2=\frac{1}{2}(1-x)$ 代入 $(*)$ 只會得出 $(1-x)(1+x)=1-x^2$：這是對的，卻毫無內容。我們必須用上 $\frac{1}{5}\pi$ 的某種特殊性質。這個特殊之處就是 $\frac{1}{5}\pi=2\cdot\frac{1}{10}\pi$，所以 $\theta=2\psi$，而二倍角公式（double-angle formula）把 s 與 x 聯繫起來：

$$s=\sin 2\psi=2\sin\psi\cos\psi,\qquad \text{所以}\qquad s^2=4x^2(1-x^2).$$

把這個結果代入 $(*)$，

$$8x^2(1-x^2)(1+x)=1-x^2.$$

由於 $0<\frac{1}{10}\pi<\frac{1}{2}\pi$，我們有 $0<x<1$，所以 $1-x^2\neq 0$，可以把它約去：

$$8x^2(1+x)=1,\qquad \text{即}\qquad 8x^3+8x^2-1=0.$$

所以 $\sin\frac{1}{10}\pi$ 滿足題目給出的三次方程（cubic），證明完畢。

驗算

恆等式可以用 $\theta = \frac{1}{2}\pi$、$\phi = \psi = 0$ 來檢驗：左方是 $1+0+0+0=1$。取 $\theta = \phi = \psi = \frac{1}{6}\pi$ 時，左方是 $3\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{8} = 1$。

至於三次方程，$\sin\frac{1}{10}\pi = \sin 18^\circ \approx 0.309017$，而 $8x^3 + 8x^2 - 1$ 在該處的值在捨入誤差範圍內等於 0。事實上，這個三次式可以因式分解為 $(2x+1)(4x^2+2x-1)$，其根為 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}(-1\pm\sqrt{5})$，而 $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) \approx 0.309017$ 正是大家熟悉的 $\sin 18^\circ$ 的準確值。

常見錯誤

- 只用 $\sin\psi = \cos 2\theta$ 來消去 s，結果得到恆等式 $0=0$；見上面的方框。
- 除以 $1-x^2$ 卻沒有說明它為何不等於零。這裏 $x = \sin\frac{1}{10}\pi$ 嚴格介乎 0 與 1 之間。

STEP 之外

三次方程的另外兩個根並非偶然：$-\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$，而 $\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) = -\sin\frac{3}{10}\pi$。這類方程記錄了 sin 和 cos 在 π 的有理數倍處的取值之間的代數關係，而要理解這些關係，最好的途徑是單位根（roots of unity）：$\cos\frac{1}{5}\pi$ 與五次單位根，即 $z^5 = 1$ 的解，有密切的關係。這就是為甚麼以直尺和圓規作正五邊形，歸根究柢取決於 $\sqrt{5}$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）是從幾何角度認識這些想法的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。