詳細解答

STEP III 1990，第 9 題

純數學 • 雙曲函數

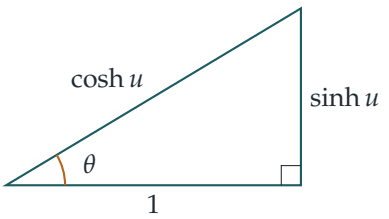
STEP III 1990，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s3-q9

關鍵思路

關係式 $\tan\theta = \sinh u$ 等同於 $\sec^2\theta = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$，因此兩個變量的三角函數（trigonometric functions）與雙曲函數（hyperbolic functions）完全對應：$\cos\theta = \operatorname{sech} u$、$\sin\theta = \tanh u$、$\sec\theta = \cosh u$。畫一個邊長為 1、$\sinh u$ 和 $\cosh u$ 的直角三角形，這些關係便一目了然。有了這本「字典」，每一部分都只需先做一次簡短的求導，再把結果翻譯回來。



解答

在整個解答中，由於 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$，我們有 $\tan\theta \ge 0$，所以 $\sinh u \ge 0$ 且 $u \ge 0$。此外 $\cos\theta > 0$ 且 $\cosh u > 0$。

第 (i) 部分

利用 $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 和 $1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$，

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u.$$

$\sec\theta$ 和 $\cosh u$ 均為正數，所以 $\sec\theta = \cosh u$，即 $\cos\theta = \operatorname{sech} u = v$，這正是所要證明的結果。

值得順帶記下與之配對的結果：$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \sinh u \operatorname{sech} u = \tanh u$。

第 (ii) 部分

把 $\tan\theta = \sinh u$ 對 u 求導（利用鏈式法則（chain rule）作隱函數求導（implicit differentiation））：

$$\sec^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \cosh u \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \cosh u\cos^2\theta = \cosh u\operatorname{sech}^2 u = \operatorname{sech} u = v,$$

其中 $\cos\theta$ 的表達式來自第 (i) 部分。

第 (iii) 部分

由於 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\cosh u = \sinh u$，

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\cosh u)^{-1} = -\frac{\sinh u}{\cosh^2 u} = -\operatorname{sech} u\tanh u.$$

查一查字典，$\operatorname{sech} u\tanh u = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$，所以

$$\sin 2\theta = -2\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}.$$

至於二階導數（second derivative），可運用積法則（product rule），並配合 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} &= -\Big[(-\operatorname{sech} u\tanh u)\tanh u + \operatorname{sech} u\cdot\operatorname{sech}^2 u\Big]\\ &= \operatorname{sech} u(\tanh^2 u - \operatorname{sech}^2 u).\end{aligned}$$

乘以 $-\cosh u$ 便可消去 $\operatorname{sech} u$：

$$-\cosh u\,\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} = \operatorname{sech}^2 u - \tanh^2 u = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta,$$

這就是第二個結果。

第 (iv) 部分

現在把 u 和 v 看成 θ 的函數。由第 (i) 部分，$v = \cos\theta$ 且 $\cosh u = \sec\theta$；而第 (ii) 部分給出 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 1\big/\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = 1/v$（因為 $v > 0$，此式成立）。所以

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sec\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = \sec\theta\tan\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2} = -\cos\theta.$$

想一想 在埋頭苦算之前，先想一想：第 (iv) 部分的恆等式，照試卷上所印的樣子看來完全正確嗎？

並不正確。按試卷所印，第一項含有 $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$，於是左方為

$$\begin{aligned}\sec\theta\cdot\sec\theta\tan\theta-\sin\theta\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta &= \sec^2\theta\tan\theta+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)\\ &= \sec^2\theta\tan\theta+1\ \geq 1,\end{aligned}$$

它永遠不會等於零。題目原意的恆等式（identity），第一項應為 $\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2}$（把 v 誤印成 u）：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2=0.$$

代入上述四個導數，

$$\sec\theta(-\cos\theta)+(-\sin\theta)\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta=-1-\tan^2\theta+\sec^2\theta=0,$$

因為 $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$。這就證明了修正後的結果。

還有一個更簡潔的看法：根據積法則，首兩項合起來就是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\right)$，而 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=-\sec\theta\sin\theta=-\tan\theta$，其導數為 $-\sec^2\theta=-\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$。

驗算

取 $u=\ln 2$，則 $\sinh u=\frac{3}{4}$、$\cosh u=\frac{5}{4}$ 且 $\tan\theta=\frac{3}{4}$：由 3–4–5 三角形可得 $\cos\theta=\frac{4}{5}=\operatorname{sech}u$ 及 $\sin 2\theta=\frac{24}{25}$，而 $-2\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}u=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$。數值方面，在 2000 個隨機點上以有限差分（finite difference）計算的導數，與 (i)–(iii) 及修正後的 (iv) 吻合，誤差約為 10^{-7}，並確認試卷所印的 (iv) 左方等於 $1+\sec^2\theta\tan\theta$。

常見錯誤

- 寫出 $\cos\theta=\pm\operatorname{sech}u$ 卻沒有說明為何應取正號：決定正負號的是範圍 $0\leq\theta<\frac{1}{2}\pi$。
- 忘記 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$ 只不過是 $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}$ 的倒數，反而從頭對 $\operatorname{arsinh}(\tan\theta)$ 求導。

STEP 之外

函數 $\theta(u)=\arctan(\sinh u)$ 稱為古德曼函數（Gudermannian function），它毋須借助複數（complex numbers）便把圓函數與雙曲函數聯繫起來；其反函數（inverse function）$u=\ln(\sec\theta+\tan\theta)=\int_0^\theta\sec t\,\mathrm{d}t$ 正好是麥卡托（Mercator）地圖上的縱坐標。當你寫下

$\cosh(\mathrm{i}x) = \cos x$ 時，同樣的配對也會出現；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可視化複分析》）是從幾何角度欣賞這些聯繫的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。