詳細解答

STEP III 1990，第 8 題

純數學 • 恰當微分方程

> **STEP III 1990，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q8

關鍵思路

展開 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py' + qy)$，再與 $Py'' + Qy' + Ry$ 比較：這樣便完全確定了 p 和 q，而條件 $P'' - Q' + R = 0$ 正好令最後一個係數吻合。至於題中的微分方程（differential equation），這個條件成立，所以積分一次就能把二階方程直接化為一階線性方程，再用積分因子（integrating factor）便可完成。

解答

恰當性的判別準則

對任意函數 p、q 和 y，由乘積法則（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py' + qy) = py'' + (p' + q)y' + q'y. \qquad (*)$$

僅當。假設 p 和 q（兩者均與 y 無關）使 $Py'' + Qy' + Ry$ 對每一個 y 都等於 $(*)$。取 $y = 1$，得 $R = q'$。取 $y = x$，得 $Q + Rx = (p' + q) + q'x$，所以 $Q = p' + q$。取 $y = \frac{1}{2}x^2$，得 $P + Qx + \frac{1}{2}Rx^2 = p + (p' + q)x + \frac{1}{2}q'x^2$，所以 $P = p$。因此

$$P'' - Q' + R = p'' - (p'' + q') + q' = 0.$$

若。假設 $P'' - Q' + R = 0$。取

$$p = P, \qquad q = Q - P'.$$

那麼 $p' + q = P' + Q - P' = Q$，而利用該條件可得 $q' = Q' - P'' = R$。由 $(*)$，對每一個 y 都有 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py' + qy) = Py'' + Qy' + Ry$，這正是所要證明的。

以上的推導同時說明 p 和 q 必定是 P 和 $Q-P'$，下面我們就用這個方法把它們求出來。

微分方程

這裏 $P=x-x^4$、$Q=1-7x^3$ 及 $R=-9x^2$，所以

$$P''-Q'+R=-12x^2-(-21x^2)-9x^2=0.$$

判別準則適用，其中 $p=P=x-x^4$ 及 $q=Q-P'=(1-7x^3)-(1-4x^3)=-3x^3$。方程變成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-x^4)y'-3x^3y\right]=(x^3+3x)\mathrm{e}^x.$$

反覆運用分部積分法（integration by parts），得 $\int x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(x^3-3x^2+6x-6)\mathrm{e}^x$ 及 $\int 3x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(3x-3)\mathrm{e}^x$，所以

$$(x-x^4)y'-3x^3y=(x^3-3x^2+9x-9)\mathrm{e}^x+C.$$

當 $x=2$ 時，$y=2\mathrm{e}^2$ 及 $y'=0$，所以左邊是 $-3\cdot 8\cdot 2\mathrm{e}^2=-48\mathrm{e}^2$，右邊是 $5\mathrm{e}^2+C$。因此 $C=-53\mathrm{e}^2$。

> **想一想** 左邊的 $(x-x^4)y'-3x^3y$ 並不是 $(x-x^4)y$ 的導數。那麼第二次積分該怎樣做？

抽出因子 x：左邊是 $x[(1-x^3)y'-3x^2y]=x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^3)y]$。（這就是常用的積分因子：$y'-\frac{3x^2}{1-x^3}y$ 的積分因子是 $\exp\int\frac{-3x^2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x=1-x^3$。）由於解位於 $x=2$ 附近，可以除以 x，於是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^3)y]=(x^2-3x+9)\mathrm{e}^x-\frac{9\mathrm{e}^x}{x}-\frac{53\mathrm{e}^2}{x}.$$

再用分部積分法，得 $\int(x^2-3x+9)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=(x^2-5x+14)\mathrm{e}^x$。$\mathrm{e}^x/x$ 這一項沒有初等原函數（elementary antiderivative），所以我們把它保留為由起點 $x=2$ 開始的積分：

$$(1-x^3)y=(x^2-5x+14)\mathrm{e}^x-53\mathrm{e}^2\ln\frac{x}{2}-9\int_2^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t+D.$$

當 $x=2$ 時，左邊是 $-7\cdot 2\mathrm{e}^2=-14\mathrm{e}^2$，右邊是 $8\mathrm{e}^2+D$，所以 $D=-22\mathrm{e}^2$。因此

$$\boxed{y=\frac{1}{1-x^3}\left[(x^2-5x+14)\mathrm{e}^x-22\mathrm{e}^2-53\mathrm{e}^2\ln\frac{x}{2}-9\int_2^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t\right]}$$

適用於 $x>1$。y'' 的係數 $x-x^4$ 在 $x=1$ 處為零，所以經過 $x=2$ 的解定義在 $x>1$ 上，而不一定能延伸至 $x=1$ 以外。

驗算

- 當 $x = 2$ 時，方括號內的值是 $8e^2 - 22e^2 = -14e^2$，除以 $1 - 8 = -7$ 得 $y = 2e^2$，符合要求。
- 由 $x = 2$ 開始以數值方法逐步求解原方程（四階龍格－庫塔法，Runge–Kutta），得 $y(3) \approx 7.90306$，與公式的結果吻合，其中的積分以辛普森法則（Simpson's rule）計算。兩者在 $x = 1.2$、1.5 和 4 處亦一致。
- 展開 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x - x^4)y' - 3x^3y\right]$，可還原為 $(x - x^4)y'' + (1 - 7x^3)y' - 9x^2y$。

常見錯誤

- 第一次積分後漏掉常數 C。它在這裏並不是零，而且對數項正是由它產生的。
- 硬要把 $\int e^x/x\,\mathrm{d}x$ 寫成閉合形式（closed form）。這是做不到的，所以應把它保留為下限是 2 的定積分，這樣代入初始條件也方便得多。

STEP 之外

若表達式 $Py'' + Qy' + Ry$ 是某個函數的全導數，便稱它為恰當（exact）的。表達式 $P'' - Q' + R$ 就是伴隨（adjoint）方程 $(Pz)'' - (Qz)' + Rz = 0$ 的左邊在 $z = 1$ 時的值。一般而言，伴隨方程的任何一個解 z 都是積分因子，能使 $z(Py'' + Qy' + Ry)$ 成為恰當的。由伴隨方程再往前走，便是自伴隨（self-adjoint）問題，即施圖姆－劉維爾（Sturm–Liouville）問題，以及格林函數（Green's function）。Boyce 與 DiPrima 所著的 *Elementary Differential Equations*（一本初等微分方程教科書）在二階線性方程的習題中，涵蓋了恰當方程和伴隨方程。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。