詳細解答

STEP III 1990，第 7 題

純數學 • 隱函數曲線描繪

> **STEP III 1990，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q7

關鍵思路

隱函數微分法（implicit differentiation）做兩次，便得到每一點的 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$，而這些正是泰勒級數（Taylor series）的係數。至於不等式，竅門在於留意到這條方程只是 y 的二次方程：點 (x,y) 要存在，這個二次方程必須有實根，所以它的判別式（discriminant）非負。把二次方程直接解出來，便可看清整條曲線：兩條分支（branch），在判別式等於零之處相接。

解答

以下一律記 $F(x,y)=xy^2+x^3+a^2y-a^3$。代入可知在 P、Q 和 R 均有 $F=0$；例如在 R 得 $a\cdot a^2+a^3-a^3-a^3=0$。

在 P、Q 和 R 的泰勒級數

把 y 視為 x 的函數，將 $F(x,y)=0$ 對 x 求導，

$$y^2+2xyy'+3x^2+a^2y'=0, \qquad \text{所以} \qquad y'=-\frac{y^2+3x^2}{2xy+a^2}.$$

把第一條方程再求導一次（$2xyy'$ 一項給出 $2yy'+2xy'^2+2xyy''$）：

$$4yy'+2xy'^2+6x+(2xy+a^2)\,y''=0.$$

在每一點，分母 $2xy+a^2$ 都不等於零，所以這些方程確定了 y' 和 y''，繼而有 $y=y_0+y'h+\frac{1}{2}y''h^2+\cdots$。

在 $P(0,a)$： $y' = -a^2/a^2 = -1$。於是 $4a(-1) + a^2 y'' = 0$，所以 $y'' = 4/a$，而

$$y = a - h + \frac{2}{a}h^2 + \cdots.$$

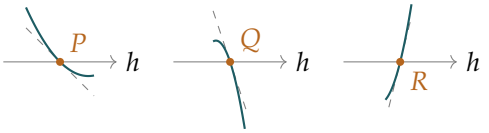
在 $Q(a,0)$： $y' = -3a^2/a^2 = -3$。於是 $0 + 2a(9) + 6a + a^2 y'' = 0$，所以 $y'' = -24/a$，而

$$y = -3h - \frac{12}{a}h^2 + \cdots.$$

在 $R(a,-a)$： 這裏 $2xy + a^2 = -a^2$，所以 $y' = -4a^2/(-a^2) = 4$。於是 $4(-a)(4) + 2a(16) + 6a - a^2 y'' = 0$，即 $22a = a^2 y''$，所以 $y'' = 22/a$，而

$$y = -a + 4h + \frac{11}{a}h^2 + \cdots.$$

因此在 P 附近，曲線以斜率（gradient）-1 下降，並且向上凹（concave up，即彎向切線上方）；在 Q 附近，曲線以斜率 -3 急降，並且向下凹（concave down）；在 R 附近，曲線以斜率 4 上升，並且向上凹。



（取 $a = 1$ 時的局部形狀；虛線為切線。）

不等式

把 C 的方程寫成 y 的二次方程：

$$x\,y^2 + a^2\,y + (x^3 - a^3) = 0.$$

若 $x \neq 0$ 而 (x,y) 在 C 上，這個二次方程便有實根 y，所以它的判別式非負：

$$a^4 - 4x(x^3 - a^3) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x^4 - 4a^3 x - a^4 \leq 0.$$

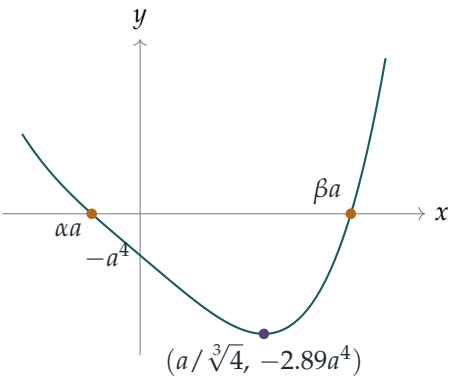
若 $x = 0$，左邊等於 $-a^4 < 0$，所以不等式在該處同樣成立。結果得證。

$y = 4x^4 - 4a^3 x - a^4$ 的圖像

試題原文印的是 $4x^4 - 4a^3 - a^4$，這肯定是誤植，應為我們剛剛遇到的四次多項式（quartic）$g(x) = 4x^4 - 4a^3 x - a^4$。我們有 $g(0) = -a^4$ 及 $g'(x) = 16x^3 - 4a^3$，後者只在 $x_0 = a/\sqrt[3]{4} \approx 0.63a$ 處等於零，g 在該處取得極小值。利用 $x_0^3 = a^3/4$，

$$g(x_0) = a^3 x_0 - 4a^3 x_0 - a^4 = -a^4(1 + 3 \cdot 4^{-1/3}) \approx -2.89a^4.$$

由於當 $x \to \pm\infty$ 時 $g \to +\infty$，而 g 先遞減後遞增，所以它恰好有兩個零點 $x = \alpha a$ 和 $x = \beta a$，其中 $\alpha \approx -0.246$ 和 $\beta \approx 1.072$ 是 $4t^4 - 4t - 1 = 0$ 的根（它們沒有簡潔的閉合形式，我們也用不着）。此外 $g''(x) = 48x^2 \geq 0$，所以圖像是凸（convex）的。



（以 $a = 1$ 繪畫。）所以 C 上每一點都滿足 $\alpha a \leq x \leq \beta a$：曲線位於一條垂直的帶狀區域之內。

曲線 C

當 $x \neq 0$ 時，解二次方程得出兩條分支

$$y_\pm = \frac{-a^2 \pm \sqrt{D}}{2x}, \qquad D = a^4 + 4a^3x - 4x^4,$$

它們恰好在該帶狀區域上取實數值，並在 $D = 0$ 之處相接，即 $x = \alpha a$ 和 $x = \beta a$。在那裏 $y = -a^2/(2x)$，而切線是垂直的，因為那正是 y' 的分母 $2xy + a^2$ 等於零的地方。由此得到 $(\beta a, -0.47a)$ 和 $(\alpha a, 2.03a)$ 兩點。

? **想一想** 當 $x \to 0$ 時，兩條分支會怎樣？

把分子和分母同乘以 $\sqrt{D} + a^2$，並利用 $D - a^4 = 4x(a^3 - x^3)$，得

$$y_+ = \frac{2(a^3 - x^3)}{a^2 + \sqrt{D}},$$

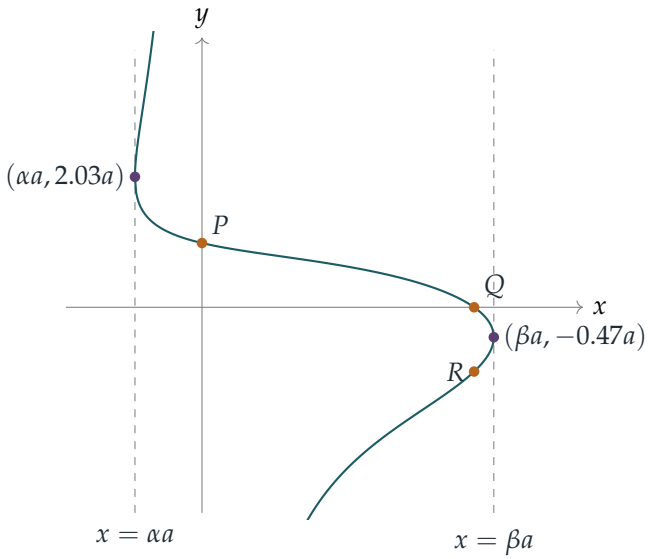
它在 $x = 0$ 處完全沒有問題，並且在該處等於 a。所以 y_+ 是一條通過 P 的光滑分支。另一條分支在 x 很小時滿足 $y_- \approx -a^2/x$，所以當 $x \to 0^+$ 時 $y_- \to -\infty$，當 $x \to 0^-$ 時 $y_- \to +\infty$。這就是沿 y 軸的漸近線（asymptote）。

再多幾項事實，有助確定草圖的形狀。

- 曲線沒有水平切線：$y' = 0$ 需要 $y^2 + 3x^2 = 0$，即 $(0,0)$，而這一點不在 C 上。

- 曲線只在 $x^3 = a^3$ 之處與 $y = 0$ 相交，即 Q；並且只在 P 與 $x = 0$ 相交。
- 在 $x = a$ 處，$D = a^4$，所以 $y_+ = 0$（點 Q）而 $y_- = -a$（點 R）。

綜合以上各點，C 是一條連通的曲線。它在 y 軸左邊不遠處沿 y_- 從 $+\infty$ 下降，到達 $(\alpha a, 2.03a)$ 處的垂直切線。然後它沿 y_+ 折回，經過 P（斜率 -1），再下降經過 Q（斜率 -3），到達 $(\beta a, -0.47a)$ 處的垂直切線，接着沿 y_- 折回，經過 R（斜率 4），在 y 軸右邊不遠處下降至 $-\infty$。曲線在 P 向上凹，在 Q 向下凹，所以兩點之間有一個拐點（point of inflection）。



（以 $a = 1$ 繪畫；虛線是上文求得的帶狀區域的邊界。）

驗算

- 取 $a = 1.7$，我們在每一點附近的 $x = x_0 + h$ 處解出二次方程的 y。每當 h 減半，各個兩項泰勒級數的誤差便縮小約 8 倍，這正是我們預期的 h^3 表現。
- 隨機取 10^5 個 x 值，二次方程有實根的情況，恰好就是 $4x^4 - 4a^3x - a^4 \leq 0$ 的情況。
- 用二分法（bisection）得 $\alpha \approx -0.2463$ 和 $\beta \approx 1.0724$。在 $x = \pm 0.001$ 處（取 $a = 1.7$），一個根接近 a，另一個根接近 $-a^2/x \approx \mp 2890$。

常見錯誤

- 漏掉因子 $\frac{1}{2}$：h^2 的係數是 $\frac{1}{2}y''$，不是 y''。

- 為了使用判別式而除以 x，卻沒有另外檢查 $x = 0$ 的情況。
- 沒有察覺 y_+ 光滑地通過 P。寫成 $(-a^2 + \sqrt{D})/(2x)$ 時，它在 $x = 0$ 處看似奇異，其實不然。

STEP 之外

這一題中，我們利用隱式定義的函數的泰勒展開式，找出曲線在某一點附近的表現。保證在 $\partial F/\partial y \neq 0$ 之處 y 是 x 的光滑函數的定理，就是**隱函數定理**（implicit function theorem），它是多元分析（multivariable analysis）的一個重要結果。帶狀區域兩端的垂直切線，正好出現在 $\partial F/\partial y = 2xy + a^2$ 等於零的點。這條曲線是平面上的三次曲線（cubic），而研究這類曲線會引領我們走向代數幾何（algebraic geometry）和橢圓曲線（elliptic curve）。想做更多這種風格的題目，可試試 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學問題集）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。