詳細解答

STEP III 1990，第 6 題

純數學 • 線性變換與橢圓

> **STEP III 1990，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q6

本題在 *Beyond STEP* 第 7.2 節只伸縮，不轉向中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch07/eigenvectors.html

關鍵思路

那兩個特殊的向量是矩陣的特徵向量（eigenvector），它們道出了整個幾何圖像：T 沿一條直線按某個倍數拉伸，又沿與之垂直的另一條直線按另一個倍數拉伸，於是單位圓變成一個橢圓（ellipse），其兩軸就落在這兩條直線上。代數方面，要求 E 的方程，最簡潔的做法是先求 T 的逆，把 x 和 y 用 X 和 Y 表示，再代入 $x^2 + y^2 = 1$。面積按行列式（determinant）的倍數縮放；又因為 T 把直線映射為直線，所以 E 的切線（tangent）就是 C 的切線的像。

解答

設 $M = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$，則 T 就是左乘 M。

兩個特殊方向

計算可得

$$M\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}9-4\\-2+12\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$
$$M\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}18+2\\-4-6\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

所以 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 方向不變，並乘以 2；而 $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 方向不變，並乘以 4，正如題目所求。留意這兩個方向互相垂直，因為 $1\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 0$。

E 的方程

M 的行列式為

$$\det M = \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 (9\cdot 6 - (-2)(-2)) = \tfrac{4}{25}\cdot 50 = 8,$$

其值非零，故 T 可逆（invertible），且

$$M^{-1} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{5}\begin{pmatrix}6 & 2\\2 & 9\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}6 & 2\\2 & 9\end{pmatrix}.$$

因此，點 (X,Y) 是 (x,y) 的像，當且僅當

$$x = \frac{3X+Y}{10}, \qquad y = \frac{2X+9Y}{20}.$$

點 (X,Y) 在 E 上，當且僅當它的原像在 C 上，即當且僅當 $x^2+y^2=1$。代入得

$$\begin{aligned}\frac{(3X+Y)^2}{100} + \frac{(2X+9Y)^2}{400} = 1 &\iff 4(9X^2+6XY+Y^2) + (4X^2+36XY+81Y^2) = 400\\ &\iff 40X^2+60XY+85Y^2 = 400\\ &\iff 8X^2+12XY+17Y^2 = 80,\end{aligned}$$

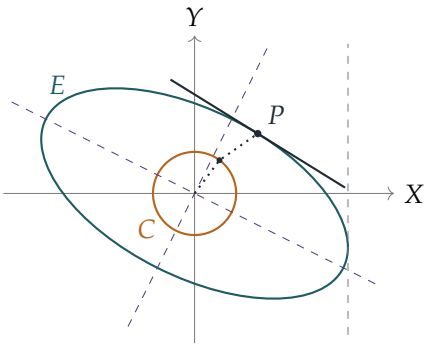
這就是所求的 E 的方程。

面積

線性映射（linear map）會把每一個面積乘以 $|\det M|$。C 所圍成的圓盤面積為 π，所以 E 所圍成的區域面積為

$$8\pi.$$

這與幾何圖像吻合：E 是一個橢圓，其半軸長為 2（沿 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 方向）和 4（沿 $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 方向），而 $\pi\cdot 2\cdot 4 = 8\pi$。



圖中顯示 C、橢圓 E 及其兩軸（虛線）、與 E 相切的鉛垂線 $X = 2\sqrt{17/5}$，以及在 P 的切線，該點是 $\frac{1}{5}(3,4)$ 的像。

X 的最大值

把 E 的方程看成 Y 的二次方程：

$$17Y^2 + 12XY + (8X^2 - 80) = 0.$$

某個 X 值會在 E 上出現，當且僅當此方程有實根 Y，即當且僅當其判別式(discriminant)非負：

$$\begin{aligned} 144X^2 - 4 \cdot 17(8X^2 - 80) \geq 0 &\iff 144X^2 - 544X^2 + 5440 \geq 0 \\ &\iff 400X^2 \leq 5440 \\ &\iff X^2 \leq \tfrac{68}{5}. \end{aligned}$$

所以 E 上每一點都滿足 $X \leq \sqrt{68/5} = 2\sqrt{17/5}$，而且等號可以取到（此時判別式為零，得出唯一的一點，其 $Y = -\frac{6X}{17}$）。因此 X 在 E 上的最大值為 $2\sqrt{17/5}$，正如題目所求。

想一想 有沒有辦法不用判別式，直接從圓看出這個結果？

有。在 E 上有 $X = \frac{2}{5}(9x - 2y)$，其中 $x^2 + y^2 = 1$。設 $(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$，則表達式 $9\cos\theta - 2\sin\theta$ 的最大值為 $\sqrt{81 + 4} = \sqrt{85}$（即 $R\cos(\theta + \alpha)$ 的形式）。所以最大的 X 是 $\frac{2}{5}\sqrt{85} = 2\sqrt{85/25} = 2\sqrt{17/5}$，與上面的結果一致。

切線

C 上的點 $\frac{1}{5}(3,4)$ 被映射到

$$P = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 9 \cdot \frac{3}{5} - 2 \cdot \frac{4}{5} \\ -2 \cdot \frac{3}{5} + 6 \cdot \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{25} \\ \frac{36}{25} \end{pmatrix}.$$

C 在 $\frac{1}{5}(3,4)$ 的切線垂直於該處的半徑，所以它的方程是

$$3x + 4y = 5.$$

由於 T 是線性而且可逆的，它把直線映射為直線，並且把一條與 C 恰好交於一點的直線，映射為一條與 E 恰好交於一點的直線。所以 E 在 P 的切線就是這條直線的像。代入 $x = \frac{3X+Y}{10}$ 和 $y = \frac{2X+9Y}{20}$：

$$\begin{aligned}\frac{3(3X+Y)}{10} + \frac{4(2X+9Y)}{20} = 5 &\iff 6(3X+Y) + 4(2X+9Y) = 100\\ &\iff 26X + 42Y = 100,\end{aligned}$$

所以 E 在 P 的切線是

$$13X + 21Y = 50.$$

驗算一下：$13 \cdot \frac{38}{25} + 21 \cdot \frac{36}{25} = \frac{494+756}{25} = 50$，所以 P 在這條直線上。另一個做法是對 $8X^2 + 12XY + 17Y^2 = 80$ 作隱函數微分（implicit differentiation），得出在 P 的法線（normal）方向為 $(16X + 12Y,\ 12X + 34Y) = \frac{1}{25}(1040, 1680)$，它與 $(13,21)$ 平行，於是得出同一條直線。

驗算

- $(1,0)$ 的像是 $\frac{2}{5}(9,-2)$，而 $\frac{4}{25}\left(8 \cdot 81 - 12 \cdot 18 + 17 \cdot 4\right) = \frac{4}{25} \cdot 500 = 80$，所以它在 E 上。
- 兩軸的端點 $\pm 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ 和 $\pm 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ 都滿足 E 的方程；例如 $\frac{4}{5}(8 + 24 + 68) = 80$。
- 數值上，在 C 上取樣 200 000 個點，得出最大值 $X \approx 3.687818$，與 $2\sqrt{17/5} \approx 3.687818$ 相符；而用鞋帶公式（shoelace formula）計算像多邊形的面積，得 $25.13274 \approx 8\pi$。

常見錯誤

- 代入 $x^2 + y^2 = 1$ 時用了 M 而不是 M^{-1}：要求像曲線的方程，需要把舊坐標用新坐標表示。
- 計算行列式時忘記了因子 $\frac{2}{5}$：它貢獻的是 $\left(\frac{2}{5}\right)^2$，而不是 $\frac{2}{5}$。
- 求出了像點 P，卻用 C 在 $\frac{1}{5}(3,4)$ 的斜率來寫 E 的切線：線性映射保持相切關係，但不保持斜率。

STEP 之外

這裏的矩陣是對稱（symmetric）的，這正是它的特徵向量互相垂直的原因：這是譜定理（spectral theorem）的二維情形，該定理指出每個實對稱矩陣都可以用一個旋轉來對角化（diagonalise）。它解釋了為甚麼任何二次型（quadratic form）$ax^2 + 2hxy + by^2$ 所描述的圓錐曲線（conic）都有互相垂直的主軸，而該二次型的矩陣的特徵值（eigenvalue）可以讓你立刻知道它的形狀。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）以大量幾何圖像闡述特徵值、對稱矩陣和二次型。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。