詳細解答

STEP III 1990，第 5 題

純數學 • 萊布尼茲定理

STEP III 1990，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s3-q5

關鍵思路

帕斯卡法則（Pascal's rule）只不過是含階乘（factorial）的分數運算，把兩項通分即可。萊布尼茲公式（Leibniz's formula）給出乘積的 n 階導數（derivative），其證明是對 n 用數學歸納法（induction）：把 n 階的公式再求導一次，每個混合項都會出現兩次，而帕斯卡法則正好把每一對合併起來。至於最後一部分，直接把 $y = \sin^{-1} x$ 求導 n 次是行不通的。我們改為找出 y 所滿足的一條簡單二階方程，再對它應用萊布尼茲公式。

（試卷上印的是 $y = \sin^{-1} y$。這顯然是 $y = \sin^{-1} x$ 的誤印，我們採用後者。）

解答

帕斯卡法則

回想 $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$，其中 $0! = 1$。當 $1 \le r \le n$ 時，$r-1$ 和 $n-r$ 均為非負數，所以下面每個階乘都有意義。由於 $r! = r\,(r-1)!$ 及 $(n-r+1)! = (n-r+1)\,(n-r)!$，公分母是 $r!\,(n-r+1)!$：

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n-r+1)}{r!\,(n-r+1)!} + \frac{n!\,r}{r!\,(n-r+1)!} \\ &= \frac{n!\,(n+1)}{r!\,(n+1-r)!} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r}.\end{aligned}$$

萊布尼茲公式

我們假設 u 和 v 可按需要求導任意多次。用求和記號表示，要證明的是

$$(uv)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n-r)} v^{(r)},$$

其中 $z^{(0)}$ 表示 z 本身。我們對 $n \geq 1$ 用數學歸納法證明。

基礎步驟（base case） $n = 1$。右邊是 $u^{(1)}v + uv^{(1)}$，由乘法法則（product rule）可知它就是 $(uv)'$。

歸納步驟（inductive step）。假設公式對某個 $n \geq 1$ 成立。把它求導，對每一項使用乘法法則：

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)} + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} u^{(n-r)} v^{(r+1)}.$$

在第二個和式中設 $s = r + 1$，它便成為 $\sum_{s=1}^{n+1} \binom{n}{s-1} u^{(n+1-s)} v^{(s)}$。現在兩個和式都由形如 $u^{(n+1-r)}v^{(r)}$ 的項組成。把第一個和式的 $r = 0$ 項和第二個和式的 $s = n + 1$ 項分拆出來：

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= u^{(n+1)}v + \sum_{r=1}^{n} \left[\binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} \right] u^{(n+1-r)} v^{(r)} + uv^{(n+1)} \\ &= u^{(n+1)}v + \sum_{r=1}^{n} \binom{n+1}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)} + uv^{(n+1)},\end{aligned}$$

這裏用了帕斯卡法則，因為 $1 \leq r \leq n$，所以法則適用。由於 $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$，上式即

$$(uv)^{(n+1)} = \sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r} u^{(n+1-r)} v^{(r)},$$

這正是 $n + 1$ 時的公式。根據數學歸納法，公式對所有 $n \geq 1$ 成立。

$\sin^{-1} x$ 的導數

設 $y = \sin^{-1} x$，其中 $-1 < x < 1$。則

$$y^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad \text{所以} \qquad (1 - x^2)(y^{(1)})^2 = 1.$$

把此式對 x 求導，

$$(1 - x^2) \cdot 2y^{(1)} y^{(2)} - 2x(y^{(1)})^2 = 0.$$

由於在 $(-1, 1)$ 上 $y^{(1)} > 0$，我們可以除以 $2y^{(1)}$：

$$(1 - x^2)\, y^{(2)} - x\, y^{(1)} = 0. \qquad (*)$$

這就是 $n = 0$ 時所要求的結果。

想一想 為甚麼先把 $y^{(1)}$ 平方再求導，而不直接把 $(1-x^2)^{-1/2}$ 求導？

直接把 $(1-x^2)^{-1/2}$ 求導，得 $y^{(2)} = x(1-x^2)^{-3/2}$，再乘以 $1-x^2$ 同樣得到 $(*)$。兩種做法都可行。重點是要得出一條方程，其係數是 x 的多項式（polynomial），而且對 y 的各階導數而言是線性（linear）的，因為這正是萊布尼茲公式處理得乾淨俐落的情況：多項式係數求導幾次便變成零。

現在把 $(*)$ 求導 n 次，其中 $n \geq 1$，對每個乘積應用萊布尼茲公式。對第一個乘積，取 $u = y^{(2)}$ 和 $v = 1-x^2$。則 $v^{(1)} = -2x$，$v^{(2)} = -2$，而所有更高階的導數均為零，所以只剩下三項：

$$((1-x^2)\,y^{(2)})^{(n)} = (1-x^2)\,y^{(n+2)} + \binom{n}{1}(-2x)\,y^{(n+1)} + \binom{n}{2}(-2)\,y^{(n)}.$$

（當 $n=1$ 時最後一項不存在，這與 $\binom{1}{2}=0$ 吻合。）對第二個乘積，取 $u = y^{(1)}$ 和 $v = x$，所以只剩下兩項：

$$(x\,y^{(1)})^{(n)} = x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)}.$$

兩式相減，$(*)$ 的 n 階導數是

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)\,y^{(n)} - x\,y^{(n+1)} - n\,y^{(n)} = 0.$$

合併同類項，$-2nx - x = -(2n+1)x$ 及 $-n(n-1) - n = -n^2$，所以

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - (2n+1)x\,y^{(n+1)} - n^2 y^{(n)} = 0,$$

這正是所要求的結果。它對所有 $n \geq 0$ 及 $(-1,1)$ 內的所有 x 成立。

驗算

- 在萊布尼茲公式中取 $n=1$：得到乘法法則。取 $n=2$：$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv''$，你可以把 $u'v + uv'$ 求導來核實。
- 在 $x = 0$ 處，最後的結果給出 $y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0)$。配合 $y^{(1)}(0) = 1$，可得 $y^{(3)}(0) = 1$ 和 $y^{(5)}(0) = 9$，所以麥克勞林級數（Maclaurin series）的開首是 $x + \frac{x^3}{6} + \frac{9x^5}{120} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40}$，這正是 $\sin^{-1} x$ 的已知級數。
- 我們作了數值驗算：對所有 $n < 60$ 檢驗帕斯卡法則；用 300 對隨機多項式精確檢驗萊布尼茲公式；並利用 $(1-x^2)^{-1/2}$ 的泰勒係數（Taylor coefficients），在 $(-1,1)$ 內的六個點上對 n 直至 27 檢驗最後的恆等式。相對殘差小於 10^{-15}。

常見錯誤

- 在歸納步驟中把第二個和式重新編排指標後，弄錯二項式係數（binomial coefficient）。應先把 $r = 0$ 和 $r = n + 1$ 這兩個首尾項分開寫出，然後才應用帕斯卡法則。
- 試圖直接把 $\sin^{-1} x$ 求導 n 次，而不先找出方程 $(*)$。
- 把 $1 - x^2$ 求導時，漏掉因子 $\binom{n}{2}$ 或負號。

STEP 之外

先找出一條係數為多項式的線性微分方程（differential equation），再把它求導 n 次，這個技巧是求泰勒係數遞推關係（recurrence）的標準方法。它直接通往常微分方程（ODE）的冪級數解法（power-series solutions），勒讓德（Legendre）函數和貝塞爾（Bessel）函數正是由此而來。萊布尼茲公式也是二項式定理（binomial theorem）在微積分中的版本：若 $u = \mathrm{e}^{ax}$ 而 $v = \mathrm{e}^{bx}$，它便化為 $(a+b)^n = \sum \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$。想進一步了解級數解法，可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。