詳細解答

STEP III 1990，第 4 題

純數學 • 三角級數

> **STEP III 1990，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q4

關鍵思路

兩個級數（series）都是餘弦之和，而且角度按等差遞增，所以有兩件順手的工具。對於單純的和，可乘以 $2\sin\beta$ 並使用積化和差公式（product-to-sum formula）：每一項都拆成兩個正弦之差，整個和便會裂項相消（telescope）。對於二項式的和，以及最後的恆等式，可把 $\cos\phi$ 看成 $e^{i\phi}$ 的實部（real part）。這樣，二項式定理（binomial theorem）或等比級數（geometric series）公式便會代勞，最後取實部或虛部（imaginary part）就得出答案。

解答

第一個級數

把這個和記作 S。根據積化和差公式 $2\sin A\cos B = \sin(B+A) - \sin(B-A)$，

$$2\sin\beta\cos(\alpha+2r\beta) = \sin(\alpha+(2r+1)\beta) - \sin(\alpha+(2r-1)\beta).$$

把 $r = 0, 1, \ldots, n$ 的各式相加，和便裂項相消：對應 r 的第一個正弦，與對應 $r+1$ 的第二個正弦互相抵消。因此只剩下兩項：

$$\begin{aligned} 2\sin\beta\, S &= \sin(\alpha+(2n+1)\beta) - \sin(\alpha-\beta) \\ &= 2\cos(\alpha+n\beta)\sin((n+1)\beta), \end{aligned}$$

這裏用了 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$，其中 $\frac{P+Q}{2} = \alpha+n\beta$ 及 $\frac{P-Q}{2} = (n+1)\beta$。由於 $\sin\beta \neq 0$，我們可以除以它，得

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\cos(\alpha+2r\beta) = \frac{\sin(n+1)\beta\,\cos(\alpha+n\beta)}{\sin\beta}}$$

留意 $\alpha + n\beta$ 正是首尾兩個角的平均值，這可用來粗略核對答案的形式是否合理。

二項式級數

把這個和記作 T。由於 $\cos\phi = \operatorname{Re} e^{i\phi}$，而二項式係數（binomial coefficient）都是實數，

$$T = \operatorname{Re} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} e^{i\alpha} (e^{2i\beta})^r = \operatorname{Re}\left[e^{i\alpha}(1 + e^{2i\beta})^n\right]$$

這是根據二項式定理得出的。現在抽出「半角」因子：

$$1 + e^{2i\beta} = e^{i\beta}(e^{-i\beta} + e^{i\beta}) = 2\cos\beta\, e^{i\beta}.$$

因此 $e^{i\alpha}(1 + e^{2i\beta})^n = 2^n \cos^n\beta\, e^{i(\alpha+n\beta)}$，而由於 $2^n\cos^n\beta$ 是實數，

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \cos(\alpha + 2r\beta) = 2^n \cos^n\beta\, \cos(\alpha + n\beta)}$$

（這一個其實並不需要 $\sin\beta \neq 0$。）

最後的恆等式

式中出現正割，表示我們需要 $\cos\theta \neq 0$，這是題目隱含的條件。第 r 項是 $\cos r\theta\, \sec^r\theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta}\sec\theta)^r$，因為 $\sec^r\theta$ 是實數。於是設

$$w = e^{i\theta}\sec\theta = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta} = 1 + i\tan\theta.$$

左方就是 $\operatorname{Re}(1 + w + \cdots + w^n)$。

想一想 為甚麼在這裏可以放心使用等比級數公式？w 又為甚麼有幫助？

這條公式需要 $w \neq 1$，而 $w - 1 = i\tan\theta \neq 0$ 正正是因為 $\sin\theta \neq 0$。題目的條件就是用在這裏。引入 w 的好處在於 $w - 1$ 是純虛數（purely imaginary），所以除以它很容易，而 w^{n+1} 則可由指數形式 $w = \sec\theta\, e^{i\theta}$ 輕易算出。設 $t = \tan\theta$，

$$1 + w + \cdots + w^n = \frac{w^{n+1} - 1}{w - 1} = \frac{\sec^{n+1}\theta\, e^{i(n+1)\theta} - 1}{it}.$$

對任意複數 z 及實數 $t \neq 0$，我們有 $\operatorname{Re}\dfrac{z}{it} = \operatorname{Re}\dfrac{-iz}{t} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{t}$。分子中的 -1 虛部為零，所以

$$\sum_{r=0}^{n} \cos r\theta\, \sec^r\theta = \frac{\sec^{n+1}\theta\, \sin(n+1)\theta}{\tan\theta} = \sec^{n+1}\theta\, \sin(n+1)\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin(n+1)\theta\, \sec^n\theta}{\sin\theta},$$

這就是所求的結果。

與第一部分的聯繫。把全式乘以 $\cos^n\theta$，恆等式便變成

$$\sum_{r=0}^{n}\cos r\theta\cos^{n-r}\theta=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

你也可以對 n 用歸納法（induction）證明這個形式：若 C_n 為左方，則 $C_n=\cos\theta\,C_{n-1}+\cos n\theta$，而 $\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta=\sin(n+1)\theta$ 便完成歸納步驟。

驗算

- $n=0$：三條公式都化為各自唯一的首項（$\cos\alpha$、$\cos\alpha$ 和 1）。
- 在第一個和中，$\beta\to 0$ 時 $\frac{\sin(n+1)\beta}{\sin\beta}\to n+1$，所以 $S\to(n+1)\cos\alpha$，這與 $n+1$ 個相等的項之和吻合。在第二個和中，$\beta=0$ 給出 $2^n\cos\alpha$，因為 $\sum\binom{n}{r}=2^n$。
- $\theta=\pi/4$，$n=2$：左方是 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}+0=2$，右方是 $\sin\frac{3\pi}{4}\cdot 2/\sin\frac{\pi}{4}=2$。
- 數值上，隨機選取 20 000 組 α、β、θ 及 $n\le 15$，三條公式與直接求和的結果都吻合，相對誤差在 10^{-9} 以內。

常見錯誤

- 忘記第一個級數共有 $n+1$ 項（由 $r=0$ 至 n），結果得出 $\sin n\beta$ 而不是 $\sin(n+1)\beta$。
- 把 $1+e^{2i\beta}$ 寫成 $2\cos\beta$，漏掉因子 $e^{i\beta}$，令答案中的角度出現偏移。
- 在最後一部分，把分子和分母分別取實部。你必須先把分母化為實數。

STEP 之外

把 cos 寫成指數的實部，三角函數的和便化為等比或二項式的和。這正是傅立葉分析（Fourier analysis）的起點：第一個和本質上就是狄利克雷核（Dirichlet kernel）$\sin\big((n+\frac{1}{2})x\big)/\sin\frac{x}{2}$，它決定了傅立葉級數（Fourier series）如何收斂。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）以優美的幾何觀點，解釋了為甚麼乘以 $e^{i\theta}$ 就是旋轉，以及為甚麼這類和最終能收攏成簡潔的公式。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。