詳細解答

STEP III 1990，第 2 題

純數學 • 三維向量

> **STEP III 1990，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q2

關鍵思路

四點全部位於同一條曲線 $t \mapsto (t^3, t^2, t)$ 上，這條曲線稱為三次撓線（twisted cubic）。兩條相交的直線必定位於同一平面上，所以第 (i) 部分歸結為證明 O、A、B、C 永不共面（coplanar），而這是一個行列式（determinant），它可以像范德蒙行列式（Vandermonde determinant）那樣因式分解。在第 (ii) 部分，條件 $ab = 1$ 令純量積（scalar product）和長度都化為單一個量 $a^2 + 1/a^2$ 的函數。

解答

首先，「相異」告訴我們甚麼？參數為 t 的點，其第三個坐標就是 t 本身，所以不同的點有不同的參數。因此 a、b、c 互不相同，而由於 O 是 $t = 0$ 所對應的點，a、b、c 均不為零。

第 (i) 部分

假設直線 OA 與 BC 確實相交。通過同一點的兩條直線位於同一平面上（若兩線剛好重合，任何包含它們的平面皆可）。於是 O、A、B、C 全部位於同一個通過原點的平面上，而位置向量（position vector）$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$、$\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$、$\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ 就會線性相關（linearly dependent）。這種情況恰好在以下條件成立時出現：

$$D = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a \\ b^3 & b^2 & b \\ c^3 & c^2 & c \end{vmatrix} = 0.$$

從第一行抽出因子 a，第二行抽出 b，第三行抽出 c，

$$D = abc\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}.$$

把首兩行各自減去第三行，然後沿最後一列展開：

$$D = abc\begin{vmatrix} (a-c)(a+c) & a-c & 0 \\ (b-c)(b+c) & b-c & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = abc\,(a-c)(b-c)\begin{vmatrix} a+c & 1 \\ b+c & 1 \end{vmatrix}$$
$$= abc\,(a-b)(a-c)(b-c).$$

每個因子都不為零：$a, b, c \neq 0$，而且 a、b、c 互不相同。所以 $D \neq 0$，四點不共面，因此直線 OA 與 BC 不可能相交。（兩線亦不平行，所以它們是異面直線（skew lines）。）

想一想 為甚麼只需證明四點不共面便已足夠？

因為相交的直線必定張成一個平面。假如 OA 與 BC 相交於點 P，那麼通過 P 並包含這兩條直線的平面就會包含 O、A、B 和 C。我們已證明這樣的平面並不存在。

第 (ii) 部分

設 $b = 1/a$。那麼 $a \neq 0$，並且 $a \neq \pm 1$，否則 $b = a$，A 與 B 便會重合。純量積為

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (ab)^3 + (ab)^2 + ab = 3,$$

而長度的平方為

$$|\mathbf{a}|^2 = a^2(a^4 + a^2 + 1), \qquad |\mathbf{b}|^2 = \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2} = \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^6}.$$

兩式相乘，得 $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 = (a^4 + a^2 + 1)^2/a^4$，所以 $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = (a^4 + a^2 + 1)/a^2$，這是正數。記 $\theta = \angle AOB$，則

$$\cos\theta = \frac{3a^2}{a^4 + a^2 + 1} = \frac{3}{u+1}, \qquad \text{其中} u = a^2 + \frac{1}{a^2}.$$

哪些值可以出現。根據算術幾何平均不等式（AM–GM）（或由於 $a^2 + a^{-2} - 2 = (a - a^{-1})^2$），$u \geq 2$，等號僅在 $a^2 = 1$ 時成立，而這個情況已被排除。所以 $u > 2$，因此

$$0 < \cos\theta = \frac{3}{u+1} < \frac{3}{3} = 1,$$

由此得 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$。其他角度都不可能出現。

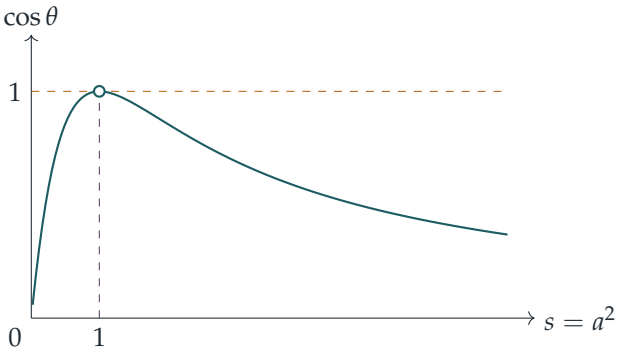
每個這樣的值都會出現。任取滿足 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 的 θ，於是 $0 < \cos\theta < 1$。我們需要 $u = 3/\cos\theta - 1$，而這個值大於 2。方程 $a^2 + 1/a^2 = u$ 是以 a^2 為未知數的二次方程 $(a^2)^2 - u\,a^2 + 1 = 0$，它有一個根

$$a^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4}}{2} > 1,$$

由於 $u > 2$，這個根是實數。取 a 為其正平方根，並取 $b = 1/a$。那麼 $a > 1 > b > 0$，所以 $ab = 1$，$A \neq B$，兩點都不是 O，並且 $\cos\angle AOB = 3/(u+1) = \cos\theta$。因此 $\angle AOB = \theta$，因為兩個角都在 $[0, \pi]$ 之內，而餘弦函數在這個區間上是一對一（one-to-one）的。

所以 $\angle AOB$ 可取 $0 < \angle AOB < \frac{1}{2}\pi$ 內的每一個值，而不能取其他值，正如題目所求。

下圖顯示 $\cos\theta$ 對 $s = a^2$ 的圖像。曲線在被排除的值 $s = 1$ 處升至 1，並在兩端趨向 0，所以它的值恰好填滿 $(0, 1)$。



驗算

- 試取 $a = 2$、$b = \frac{1}{2}$：$A = (8, 4, 2)$ 和 $B = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ 給出 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 + 1 + 1 = 3$，而公式給出 $\cos\theta = 12/21 = 4/7$，所以 $\theta \approx 55.2°$，確實在區間之內。
- 當 $a \to 1$ 時，點 A 與 B 合而為一，$\theta \to 0$。當 $a \to \infty$ 時，A 幾乎沿著 x 軸遠去，而 B 幾乎沿著 z 軸趨近 O，所以 $\theta \to \frac{1}{2}\pi$。這正是區間的兩端。
- D 的因式分解已用數千組隨機有理數 a、b、c 作精確驗證，角度公式及其值域亦已用數值方法驗證。

常見錯誤

- 忘記說明為何 a、b、c 互不相同且不為零。正是這些事實令 $D \neq 0$。

- 沒有排除 $a = \pm 1$，單憑 $\cos\theta < 1$ 就下結論。嚴格不等式 $u > 2$ 才是排除 $\theta = 0$ 的關鍵。
- 只證明「沒有其他值」。題目還要求你證明區間內每一個值都能取到，這需要明確給出一個 a。

STEP 之外

曲線 (t^3, t^2, t) 就是三次撓線，是代數幾何（algebraic geometry）中的標準例子。第 (i) 部分所說的，就是這條曲線上任意四點都不共面，而你計算的行列式是一個范德蒙行列式，它在多項式插值（polynomial interpolation）和線性獨立（linear independence）的論證中會再次出現。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對行列式和線性獨立有清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。