詳細解答

STEP III 1990，第 16 題

概率與統計 • 幾何概率

STEP III 1990，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s3-q16

本題在 *Beyond STEP* 第 12.21 節折斷一根棒中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/broken-stick.html

關鍵思路

三段總長固定的線段，恰好在每一段都小於總長的一半時，才可以組成三角形。三角形一旦存在，它是鈍角三角形（obtuse triangle）的充要條件，就是最長邊的平方大於另外兩邊的平方和（餘弦定理（cosine rule））。兩部分都可化為關於隨機變量（random variable）的條件，而所求的概率在 (i) 中變成區間的長度，在 (ii) 中變成區域的面積。

解答

第 (i) 部分

三段的長度分別是 X、$\frac{1}{2}(1-X)$ 和 $\frac{1}{2}(1-X)$，總長為 1。三個正數長度可以組成三角形，當且僅當每一個都小於另外兩個之和，即小於周界的一半，在這裏就是 $\frac{1}{2}$。只要 $X>0$，兩段相等的線段都滿足 $\frac{1}{2}(1-X)<\frac{1}{2}$，所以唯一的條件是 $X<\frac{1}{2}$。設 T 為可以組成三角形這個事件，則

$$\mathrm{P}(T)=\mathrm{P}\left(0<X<\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}.$$

一個三角形是鈍角三角形，當且僅當最長邊的平方大於另外兩邊的平方和。哪一條邊最長，則取決於 X。

- 若 $X\le\frac{1}{3}$，則 $X\le\frac{1}{2}(1-X)$，所以兩段相等的線段之一是最長邊。這時要檢驗的條件是 $\frac{1}{4}(1-X)^2>\frac{1}{4}(1-X)^2+X^2$，即 $X^2<0$，這是不可能發生的。這個三角形是等

腰三角形（isosceles triangle），底邊不比兩條等邊長，所以它永遠不是鈍角三角形。

- 若 $\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}$，最長邊是 X，而三角形是鈍角三角形，當且僅當

$$X^2 > 2 \cdot \tfrac{1}{4}(1-X)^2 \iff X > \frac{1-X}{\sqrt{2}},$$

這裏取正平方根，因為兩邊都是正數。整理後得 $X(\sqrt{2}+1) > 1$，即 $X > \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \approx 0.414$，這個值確實落在 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ 之內。

設 O 為三角形是鈍角三角形這個事件，則 $O \cap T$ 就是事件 $\sqrt{2}-1 < X < \frac{1}{2}$。由於 X 服從均勻分佈（uniform distribution），

$$\mathrm{P}(O \mid T) = \frac{\mathrm{P}(\sqrt{2}-1 < X < \frac{1}{2})}{\mathrm{P}(T)} = \frac{\frac{1}{2} - (\sqrt{2}-1)}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2},$$

正如所求。

第 (ii) 部分

這個構作總是可行的。 以 $(1,0)$、$(1,1)$、$(0,1)$ 為頂點的三角形 R，就是滿足 $x \le 1$、$y \le 1$ 和 $x + y \ge 1$ 的點所組成的集合。題目給出的三條邊 x、y、$2-x-y$ 總長為 2，它們可以組成一個三角形（可能是退化（degenerate）的），當且僅當三者皆非負，而且沒有一個超過周界的一半，即 1：

- $0 \le x \le 1$ 和 $0 \le y \le 1$ 在 R 上成立；
- $2 - x - y \le 1$ 其實就是 $x + y \ge 1$，而 $2 - x - y \ge 0$ 可由 $x \le 1$、$y \le 1$ 推出。

所以 R 上的每一點都給出一個三角形。只有在 R 的邊上，三角形才是退化的，而這些邊的概率為零。

$\angle ABC$ 何時是鈍角？ 位於 B 的角夾在 BA 與 BC 之間，所以它的對邊是 $CA = y$。根據餘弦定理，$\angle ABC$ 是鈍角，當且僅當 $CA^2 > AB^2 + BC^2$：

$$y^2 > x^2 + (2-x-y)^2.$$

展開 $(2-x-y)^2 = (2-x)^2 - 2(2-x)y + y^2$，$y^2$ 項互相抵消，條件變成

$$2(2-x)y > x^2 + (2-x)^2 = 2x^2 - 4x + 4.$$

由於 $x \le 1$，我們有 $2 - x > 0$，所以可以把兩邊除以 $2(2-x)$ 而不必改變不等號的方向：

$$y > \frac{x^2 - 2x + 2}{2 - x},$$

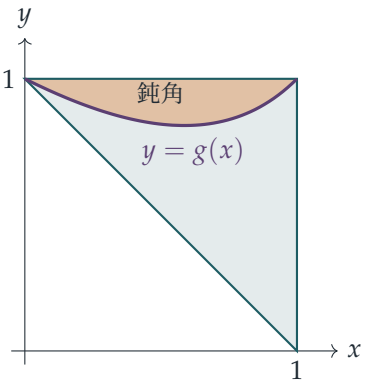
正如所求。把右邊記作 $g(x)$。

想一想 曲線 $y = g(x)$ 真的一直留在三角形 R 之內嗎？

我們需要它在 $0 \le x \le 1$ 時位於直線 $y = 1 - x$ 與 $y = 1$ 之間，這樣鈍角區域就正好是 R 在曲線上方的部分。事實上，

$$1 - g(x) = \frac{(2-x) - (x^2 - 2x + 2)}{2 - x} = \frac{x(1-x)}{2-x} \ge 0, \qquad g(x) - (1-x) = \frac{x}{2-x} \ge 0,$$

而且 $g(0) = g(1) = 1$。所以曲線由 $(0,1)$ 走到 $(1,1)$，中途降到 $y = 1$ 之下，但從不低於斜邊 $x + y = 1$。



概率。 三角形 R 的面積是 $\frac{1}{2}$，所以聯合密度（joint density）在 R 上等於 2，於是

$$\mathrm{P}(\angle ABC \text{ 為鈍角}) = 2 \times \text{面積}\{(x,y) : g(x) < y \le 1,\ 0 \le x \le 1\} = 2\int_0^1 \big(1 - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

要對 g 積分，可代入 $u = 2 - x$，於是 $x = 2 - u$，而

$$x^2 - 2x + 2 = (2-u)^2 - 2(2-u) + 2 = u^2 - 2u + 2, \qquad g = \frac{u^2 - 2u + 2}{u} = u - 2 + \frac{2}{u}.$$

當 x 由 0 變到 1 時，u 由 2 變到 1，而 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$，所以

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(u - 2 + \frac{2}{u}\right)\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2}u^2 - 2u + 2\ln u\right]_1^2 \\ &= (2 - 4 + 2\ln 2) - \left(\tfrac{1}{2} - 2\right) = 2\ln 2 - \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{P}(\angle ABC \text{ 為鈍角}) = 2\left(1 - 2\ln 2 + \tfrac{1}{2}\right) = 3 - 4\ln 2,$$

正如所求。

驗算

- 數值上，$3-2\sqrt{2}\approx 0.1716$，$3-4\ln 2\approx 0.2274$。以 10^6 次試驗進行蒙地卡羅模擬（Monte Carlo simulation），結果約為 0.1719 和 0.2278。
- 兩個答案都在 0 與 1 之間。在 (ii) 中，曲線在兩端都碰到 $y=1$：在 $x=0$ 時邊 BC 消失，在 $x=1$ 時邊 AB 消失，所以兩者都是退化情況，正如所料。
- 以辛普森法則（Simpson's rule）計算 $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$，得 0.886294，與 $2\ln 2-\frac{1}{2}$ 吻合。

常見錯誤

- 在 (i) 中忘記取條件：出現鈍角三角形的無條件概率是 $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$，只有所求答案的一半。
- 在 (ii) 中，餘弦定理用錯了邊。位於 B 的角的對邊是 $CA=y$，而不是 AB。
- 忘記 R 上的密度是 2 而不是 1，結果答案只有應有的一半。

STEP 之外

把概率化為長度或面積，就是幾何概率（geometric probability），而隨機折斷一根棒正是其中一個經典問題：在兩個獨立的均勻隨機點把棒折斷，可以組成三角形的機會是 $\frac{1}{4}$。第 (ii) 部分讓你初次接觸連續聯合分佈（continuous joint distribution），當中的概率是聯合密度在某個區域上的二重積分（double integral）。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門教科書）有講解聯合密度，並收錄了好幾道這類題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。