詳細解答

STEP III 1990，第 15 題

概率與統計 • 幾何分佈

STEP III 1990，第 15 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s3-q15

關鍵思路

每次投擲出現 A 的概率（probability）是 $\frac{1}{4}$，出現 B 的概率是 $\frac{3}{4}$，而且各次投擲互相獨立（independent）。因此事件 $\{M = m,\ N = n\}$ 就是某一串特定的投擲結果，其概率是一個乘積。這個乘積可以拆成只與 m 有關的因子乘以只與 n 有關的因子，而這一點幾乎包辦了所有工作：邊際分佈（marginal distribution）是幾何分佈（geometric distribution），兩個變量互相獨立，其後每一個概率都是一個等比級數（geometric series）。

解答

設單次投擲中 $p = \mathrm{P}(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$，$q = \mathrm{P}(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$。各次投擲互相獨立。

事件 $\{M = m,\ N = n\}$ 發生，當且僅當最初的 $m + n + 1$ 次投擲為

$$\underbrace{A\,A\cdots A}_{m}\ \underbrace{B\,B\cdots B}_{n}\ A,$$

所以根據獨立性，對於 $m \geq 0$ 及 $n \geq 1$，

$$\mathrm{P}(M = m,\ N = n) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^m \left(\tfrac{3}{4}\right)^n \tfrac{1}{4} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{m+1} \left(\tfrac{3}{4}\right)^n.$$

（這串投擲結果以概率 1 終會出現一個 B，然後再出現一個 A，所以這些概率之和為 1；下面的邊際分佈可以印證這一點。）

第 (i) 部分

求 M 的邊際分佈時，對 $n \geq 1$ 求和，並利用 $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \dfrac{3/4}{1-3/4} = 3$：

$$\mathrm{P}(M=m) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{m+1}\cdot 3 = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{m}, \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

求 N 的邊際分佈時，對 $m \geq 0$ 求和，並利用 $\sum_{m\geq 0}\left(\frac{1}{4}\right)^{m+1} = \dfrac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}$：

$$\mathrm{P}(N=n) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n} = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1}, \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

兩個結果都可以直接理解：M 是第一個 B 出現之前 A 的個數，而 N 則是一連串 B 開始之後，等待第一個 A 出現所需的次數。兩者各自的總和都是 1。

第 (ii) 部分

我們利用 $\sum_{k\geq 1} kx^{k-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$，其中 $|x|<1$（把等比級數求導即得）。於是

$$\mathrm{E}(M) = \tfrac{3}{4}\sum_{m\geq 1} m\left(\tfrac{1}{4}\right)^{m} = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{(3/4)^2} = \tfrac{1}{3},$$

$$\mathrm{E}(N) = \tfrac{1}{4}\sum_{n\geq 1} n\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1/4)^2} = 4.$$

獨立性

把兩個邊際分佈相乘，

$$\mathrm{P}(M=m)\,\mathrm{P}(N=n) = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{m}\cdot\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{m+1}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n} = \mathrm{P}(M=m,\ N=n)$$

對所有 $m \geq 0$、$n \geq 1$ 都成立。所以 M 與 N *確實*互相獨立。

> ? **想一想** 一連串 A 的長度，難道不會影響一連串 B 的長度嗎？為甚麼不會？

一連串 A 在第一個 B 出現時結束，而由該次投擲起，整個過程重新開始：餘下的投擲與之前發生的一切互相獨立。一連串 B 的長度只取決於這些較後的投擲，所以知道 M 的值，並不能告訴我們任何關於 N 的資料。聯合概率（joint probability）可以分解為兩個因子，正是這個事實的代數形式。

涉及 N 與 M 的概率

對於整數 $k \geq 1$，把幾何分佈的尾部求和：

$$\mathrm{P}(N>k) = \sum_{n\geq k+1}\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{(3/4)^k}{1-3/4} = \left(\tfrac{3}{4}\right)^{k}.$$

這條公式同時給出 $\mathrm{P}(N>0)=1$，由於 $N\geq 1$，這是正確的。

求 $\mathrm{P}(N>M)$ 時，以 M 的值為條件，並利用獨立性：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N>M)&=\sum_{m\geq 0}\mathrm{P}(M=m)\,\mathrm{P}(N>m)=\sum_{m\geq 0}\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{m}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{m}\\&=\tfrac{3}{4}\sum_{m\geq 0}\left(\tfrac{3}{16}\right)^{m}=\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{16}{13}=\tfrac{12}{13}.\end{aligned}$$

至於 $\mathrm{P}(N=M)$，由於 $N\geq 1$，兩者的共同值必須至少為 1：

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(N=M)&=\sum_{m\geq 1}\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{m}\cdot\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{m-1}=\tfrac{3}{64}\sum_{m\geq 1}\left(\tfrac{3}{16}\right)^{m-1}\\&=\tfrac{3}{64}\cdot\tfrac{16}{13}=\tfrac{3}{52}.\end{aligned}$$

最後，$N>M$、$N=M$、$N<M$ 這三個事件互斥（exclusive）且窮盡（exhaustive）所有可能，所以

$$\mathrm{P}(N<M)=1-\tfrac{12}{13}-\tfrac{3}{52}=\tfrac{52-48-3}{52}=\tfrac{1}{52},$$

正是所求。

驗算

- 兩個平均值都符合直覺：A 很少出現，所以開頭的一連串 A 很短（平均為 $\frac{1}{3}$），而我們平均要等 $1/p=4$ 次投擲，才有一個 A 出現來結束一連串 B。
- 直接計算，$\mathrm{P}(M>n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$，所以 $\mathrm{P}(N<M)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}=\frac{1}{64}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{16}\right)^{n-1}=\frac{1}{64}\cdot\frac{16}{13}=\frac{1}{52}$，與用減法所得的結果一致。$\mathrm{P}(N>k)=\left(\frac{3}{4}\right)^{k}$ 的直接解釋是：第一個 B 之後，接着的 k 次投擲必須全部是 B。
- 把聯合分佈精確求和，得 $\mathrm{P}(N>M)=0.92308$，$\mathrm{P}(N=M)=0.05769$，$\mathrm{P}(N<M)=0.01923$；模擬 200 000 組投擲，所得結果為 0.923、0.058、0.019，樣本平均值則為 0.334 和 3.99。

常見錯誤

- 在 $\mathrm{P}(N=M)$ 的求和中包括了 $m=0$：N 永遠不可能是 0。
- 忘記 M 可以是 0（第一次投擲可能就是 B），以致 M 的邊際分佈移了位，算出錯誤的平均值。

STEP 之外

這裏兩段連串的長度互相獨立，是因為一連串獨立試驗會在任何只由過去決定的時刻「重新開始」，例如第一個 B 出現的時刻。這就是強馬可夫性質（strong Markov property），它是更新理論（renewal theory）和馬可夫鏈（Markov chain）分析的基礎，而這些都是大學一、二年級的課題。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門教科書）以恰到好處的程度講解幾何分佈、獨立性和馬可夫鏈。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。