詳細解答

STEP III 1990，第 14 題

力學 • 力系

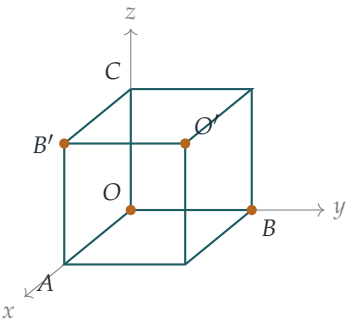
> **STEP III 1990，第 14 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q14

關鍵思路

作用於剛體（rigid body）上的力系，歸根究底只由兩個向量決定：合力（resultant）$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$，以及對某一選定點的力矩（moment）$\mathbf{G}_P = \sum(\mathbf{r}_i - \mathbf{p}) \times \mathbf{F}_i$。把基點由 O 移到 P，力矩按一條簡單的規則改變：$\mathbf{G}_P = \mathbf{G}_O - \mathbf{p} \times \mathbf{R}$。本題每一部分，都是把這條規則用於不同的 P。

解答

把正方體視為邊長為 a 的剛體，於是 $A = (a, 0, 0)$，$B = (0, a, 0)$，$C = (0, 0, a)$，而與 B 相對的頂點是 $B' = (a, 0, a)$。



求 λ、μ、ν

作用於 O 的力對 O 沒有力矩，所以只需考慮其餘三個力。利用 $(x,y,z)\times(p,q,r) = (yr-zq,\ zp-xr,\ xq-yp)$：

$$\overrightarrow{OO'}\times\begin{pmatrix}\lambda\\0\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\lambda\\0\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\\lambda-1\\-\lambda\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OB}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OB'}\times\begin{pmatrix}1\\\mu\\\nu\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\\mu\\\nu\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-\mu\\1-\nu\\\mu\end{pmatrix}.$$

相加後，對 O 的總力矩為 $a\,(3-\mu,\ \lambda-\nu,\ 1-\lambda+\mu)$。令每個分量為零，得 $\mu=3$，繼而 $\lambda=1+\mu=4$，再得 $\nu=\lambda=4$：

$$\lambda=4,\qquad \mu=3,\qquad \nu=4.$$

以上結果完全不取決於 α,β,γ，而合力為

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}\alpha+\lambda-1+1\\\beta+\mu\\\gamma+1+2+\nu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+4\\\beta+3\\\gamma+7\end{pmatrix},\qquad \mathbf{G}_O=\mathbf{0}.$$

第 (i) 部分

當 $\alpha=\beta=\gamma=0$ 時，$\mathbf{R}=(4,3,7)$。兩個力系等效（equivalent），是指它們有相同的合力，並且對某一點（因而對每一點）有相同的力矩。所以作用於 B 的單一力必定就是 $\mathbf{R}$ 本身，而力偶（couple）必須等於原力系對 B 的力矩：

$$\mathbf{G}_B=\mathbf{G}_O-\overrightarrow{OB}\times\mathbf{R}=\mathbf{0}-a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\\7\end{pmatrix}=-a\begin{pmatrix}7\\0\\-4\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-7\\0\\4\end{pmatrix}.$$

? **想一想** 為甚麼對 B 的力矩等於 $\mathbf{G}_O-\overrightarrow{OB}\times\mathbf{R}$？

對每一個力，$(\mathbf{r}_i-\mathbf{b})\times\mathbf{F}_i=\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i-\mathbf{b}\times\mathbf{F}_i$；對 i 求和便得 $\mathbf{G}_O-\mathbf{b}\times\mathbf{R}$。

因此，等效力系是一個作用於 B 的力 $(4,3,7)$，連同一個力矩為 $a(-7,0,4)$ 的力偶。驗算一下：作用於 B 的力加上這個力偶，對 O 的力矩等於 $a(7,0,-4)+a(-7,0,4)=\mathbf{0}$，正如所料。

第 (ii) 部分

現在 $\mathbf{R} = (2+4,\ 3+3,\ 2+7) = (6,6,9) = 3(2,2,3)$，而 $\mathbf{G}_O = \mathbf{0}$ 依然成立。在位置向量（position vector）為 $\mathbf{r} = (x,y,z)$ 的點 P，

$$\mathbf{G}_P = \mathbf{G}_O - \mathbf{r}\times\mathbf{R} = -\mathbf{r}\times\mathbf{R}.$$

由於 $\mathbf{R}\neq\mathbf{0}$，上式為零當且僅當 $\mathbf{r}$ 與 $\mathbf{R}$ 平行（或 $\mathbf{r}=\mathbf{0}$）。所以所求軌跡（locus）是通過 O、方向為 $(2,2,3)$ 的直線：

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

從物理上看，整個力系等效於沿這條直線作用的單一力 $(6,6,9)$。

當正方體平移（不帶轉動）時，每一點的位移都相同，所以各力所作的功（work done）是 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{s}$，其中 $\mathbf{s}$ 是位移。若沿該直線、朝 $(2,2,3)$ 的方向移動距離 d，則 $\mathbf{s} = \dfrac{d}{\sqrt{17}}(2,2,3)$，而

$$W = (6,6,9)\cdot\frac{d}{\sqrt{17}}(2,2,3) = \frac{51d}{\sqrt{17}} = 3\sqrt{17}\,d.$$

題目沒有為這段距離命名；每單位距離所作的功是 $3\sqrt{17}\approx 12.37$ 個單位。由於 $\mathbf{R}$ 沿着這條直線，這其實就是 $|\mathbf{R}|\,d = \sqrt{36+36+81}\,d = \sqrt{153}\,d$，數值相同。（若沿直線反方向移動，則得 $-3\sqrt{17}\,d$。）

驗算

- 取 $\lambda = 4$、$\mu = 3$、$\nu = 4$，三個對 O 的力矩分別是 $a(1,3,-4)$、$a(2,0,1)$ 和 $a(-3,-3,3)$，其和為零。
- 在 (ii) 中，取 $P=(2,2,3)$：$\mathbf{r}\times\mathbf{R} = (2,2,3)\times(6,6,9) = \mathbf{0}$。在 $P=(1,0,0)$，力矩為 $-(0,-9,6)\neq\mathbf{0}$。
- 以電腦用精確分數運算，核實了每一個力矩，檢查了 (i) 中的等效力系對 20 個隨機點的力矩均與原力系相同，並確認每單位距離所作的功為 $3\sqrt{17}\approx 12.369$。

常見錯誤

- 把 $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ 的次序弄錯：次序顛倒，所有正負號都會反轉。
- 把 (i) 中的力偶當作 $+\overrightarrow{OB}\times\mathbf{R}$。把力由 O 移到 B，所需的補償力偶帶相反的符號。
- 逐一計算作用於不同頂點的各個力所作的功再相加。在純平移中，只有合力才起作用。

STEP 之外

作用於剛體上的任何力系，都可以化簡為沿某條直線的單一力，連同一個繞同一條直線的力偶。這稱為*力螺旋*（wrench），其螺距（pitch）為 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{G}/|\mathbf{R}|^2$。在 (ii) 中螺距為零，所以力螺旋只是一個單一力，而零力矩軌跡就是它的作用線（line of action），即中心軸（central axis）。這些概念通往剛體動力學（rigid-body dynamics），以及機械人學中的旋量理論（screw theory）。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）以恰當的程度講解力矩和剛體。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。