詳細解答

STEP III 1990，第 13 題

力學 • 球內的運動

> **STEP III 1990，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q13

關鍵思路

整個過程分為兩個階段：先是在球面上作圓周運動（circular motion），直至法向反作用力（normal reaction）消失為止；然後是作為拋體（projectile）的自由飛行。離開球面的條件決定了離開一刻的速率，並可用 θ 表示；其後只需依照提示去做：把拋體重返球面的條件 $x^2 + y^2 = a^2$ 寫成關於 t 的方程。由於離開條件令其中幾項互相抵銷，這條方程會化簡得非常漂亮。

解答

模型

我們把 P 視為質點（particle），並把球面（半徑 a）視為光滑（smooth），因此 P 與球面接觸時，所受的力只有它的重量 mg 和指向 O 的法向反作用力 R。運動在通過 O 的一個鉛垂平面內進行；我們取 O 為原點，x 軸為水平方向，y 軸鉛垂向上，並設 P 沿球面的右邊向上爬升。

P 若要離開球面，就必定是在高於 O 的水平之處離開：在該水平以下，重力沿 PO 的分量背向 O，所以當 P 仍在圓上運動時，R 在那裏不可能為零。因此 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。

離開球面

設 P 的速率為 v 時，OP 與向上的鉛垂線所成的角為 θ，於是 P 位於 $a\cos\theta$ 的高度（相對於 O 而言）。沿指向 O 的方向分解，重量在該方向的分量為 $mg\cos\theta$，所以

$$R + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a}.$$

P 在 $R = 0$ 時離開球面，所以在該刻

$$v^2 = ag\cos\theta.$$

（由能量守恆（conservation of energy）可知，拋射速率必須是 u，其中 $u^2 = v^2 + 2ga(1+\cos\theta) = ag(2+3\cos\theta)$，所以只要適當選取 u，$(0, \frac{\pi}{2})$ 內的每一個 θ 都可以達到。隨着 P 向上爬升，v 減小，R 亦減小，所以 R 正是在這一點首次變為零。）

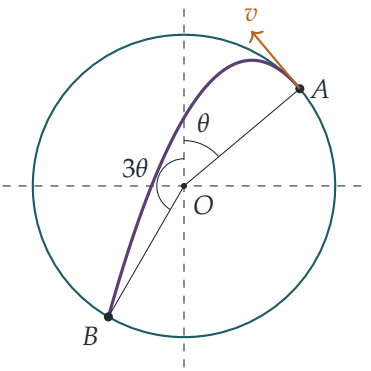
自由飛行

把離開的一刻記為 $t = 0$，此時 P 位於 $(a\sin\theta, a\cos\theta)$，其速度沿切線（tangent）方向，與 OP 垂直，並指向上方、越過球頂：

$$\text{速度} = v(-\cos\theta,\ \sin\theta).$$

此後只有重力作用，所以

$$x = a\sin\theta - vt\cos\theta, \qquad y = a\cos\theta + vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$



P 在 A 離開球面，並且（如下文所證）在 B 再次撞上球面。

P 位於球面上的條件是 $x^2 + y^2 = a^2$。展開後，關於 t 的常數項和一次項分別是

$$a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta = a^2 \qquad \text{及} \qquad -2avt\sin\theta\cos\theta + 2avt\cos\theta\sin\theta = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - a^2 &= v^2t^2\cos^2\theta + v^2t^2\sin^2\theta - gt^2\left(a\cos\theta + vt\sin\theta\right) + \tfrac{1}{4}g^2t^4 \\ &= \left(v^2 - ag\cos\theta\right)t^2 - gv\sin\theta\, t^3 + \tfrac{1}{4}g^2t^4 \\ &= gt^3\left(\tfrac{1}{4}gt - v\sin\theta\right), \end{aligned}$$

最後一步用了 $v^2 = ag\cos\theta$。

想一想 為甚麼 $t = 0$ 是三重根（triple root），而不只是單根？

在離開的一刻，單靠重力就剛好提供了沿圓運動所需、指向 O 的加速度 v^2/a。因此拋物線起初不但與球面有相同的方向，而且有相同的曲率（curvature）：它先緊貼着球面，然後才向球內偏離。這就是為甚麼除了 t 項之外，連 t^2 項也抵銷了。

當 $0 < t < 4v\sin\theta/g$ 時，上式為負，所以 P 嚴格位於球內，而它下一次與球面相遇的時刻是

$$T = \frac{4v\sin\theta}{g}.$$

落點位置

在 $t = T$ 時，利用 $vT\sin\theta = 4v^2\sin^2\theta/g = 4a\cos\theta\sin^2\theta$ 和 $\frac{1}{2}gT^2 = 8v^2\sin^2\theta/g = 8a\cos\theta\sin^2\theta$，可得

$$y = a\cos\theta + 4a\cos\theta\sin^2\theta - 8a\cos\theta\sin^2\theta = a\cos\theta\left(1 - 4\sin^2\theta\right).$$

（這就是 $a\cos 3\theta$，因為 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\theta(1 - 4\sin^2\theta)$；同樣地 $x = -a\sin 3\theta$，所以撞擊點 B 位於另一邊、與向上的鉛垂線成 3θ 角之處，正如圖中所示。）

P 撞在低於 O 的水平之處，當且僅當 $y < 0$。由於 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，故 $\cos\theta > 0$，所以

$$y < 0 \iff 1 - 4\sin^2\theta < 0 \iff \sin\theta > \tfrac{1}{2} \iff \theta > \tfrac{\pi}{6},$$

最後一步成立，是因為 sin 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上遞增。當 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 恰好成立時，P 撞上球面的位置恰好與 O 同一水平。所以 θ 必須超過的角是

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ}$$

而每一個 θ 只要滿足 $30^\circ < \theta < 90^\circ$，撞擊點確實都低於 O 的水平。

驗算

- $\theta = 60^\circ$：公式給出 $y = a\cos 180^\circ = -a$，所以 P 落回最低點，即拋射點。若取 $\theta = 45^\circ$，它落在與向上的鉛垂線成 135° 之處；兩者都有 $y < 0$，與預期相符。
- 當 $\theta \to 0$ 時，$T \to 0$ 且 $B \to A$：一個在球頂僅僅離開球面的質點，會立即落回球面上。
- 以數值模擬（逐步計算球面上的運動直至 $R = 0$，然後計算拋體運動直至它與球面相遇）檢驗 $\theta = 10^\circ, 25^\circ, 29^\circ, 30.5^\circ, 31^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ 各情況，結果與 $T = 4v\sin\theta/g$ 和 $y = a\cos 3\theta$ 吻合至小數點後四位；例如 $\theta = 31^\circ$ 給出 $y/a = -0.0523$。

常見錯誤

- 弄錯速度的方向：速度與 OP 垂直，並且仍然向上、越過球頂，其分量為 $(-v\cos\theta,\, v\sin\theta)$，而不是 $(v\sin\theta,\, v\cos\theta)$。
- 忘記先代入 $v^2 = ag\cos\theta$ 才去解 $x^2 + y^2 = a^2$，結果得到一條棘手的四次方程（quartic），而不是簡潔的因式分解（factorisation）。
- 把 $1 - 4\sin^2\theta < 0$ 兩邊相除時，沒有指出 $\cos\theta > 0$（這是因為 P 在高於 O 的水平之處離開）。

STEP 之外

$t = 0$ 處的三重根，其實是關於密切（osculation）的一個陳述：拋物線與圓在離開點有相同的切線和相同的曲率，所以兩者有二階切觸。曲率和密切圓（osculating circle）是曲線的微分幾何（differential geometry）中的核心概念；在力學中，每當我們把加速度分解為切向和法向兩部分時，它們都會再次出現。Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對極坐標（polar coordinates）下的運動，以及這類受約束的運動，都有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。