詳細解答

# STEP III 1990，第 12 題

力學 • 移動楔上的質點

> **STEP III 1990，第 12 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q12

## 關鍵思路

質點下滑期間有兩個量守恆：水平動量（horizontal momentum）（桌面光滑，所以沒有水平方向的外力）和能量（所有表面都是光滑的）。這兩條定律，加上質點相對於楔塊始終沿斜面 $AC$ 運動這一事實，就確定了所有速度。之後的反彈和飛行只是拋體運動（projectile motion），而楔塊則以恆定速率滑行。

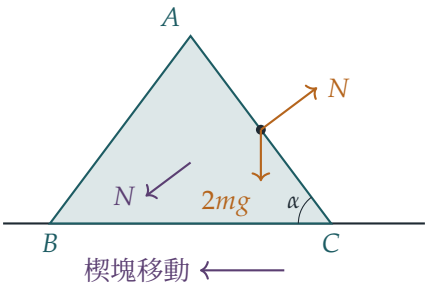
## 解答

### 建立模型

把質點視為質量為 $2m$ 的點質量（point mass），並把楔塊（wedge）視為質量為 $m$ 的剛體（rigid body）。所有接觸面都是光滑的。在通過 $A$、$B$、$C$ 的鉛垂截面上考慮問題。取 $B$ 為原點，$C = (6a, 0)$，$A = (3a, 4a)$。$A$ 的高度是 $4a$，因為三角形是等腰三角形，$AB = AC = 5a$，而底邊的一半是 $3a$。設 $\alpha$ 為角 $ACB$。則

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

質點沿 $AC$ 下滑，向 $x$ 軸正方向運動，而楔塊則向 $x$ 軸負方向後退。




設 $u$ 為質點相對於楔塊的速率，方向沿 $AC$ 向下。設 $V$ 為楔塊的速度，其方向是水平的。質點的速度等於楔塊的速度加上質點相對於楔塊的速度：

$$\mathbf{v}_P = \big(V + u\cos\alpha,\ -u\sin\alpha\big) = \big(V + \tfrac{3}{5}u,\ -\tfrac{4}{5}u\big).$$

### 下滑期間的動量與能量

外力只有重力和桌面的鉛垂反作用力，所以水平動量守恆。它起初為零，因此

$$2m\big(V + \tfrac{3}{5}u\big) + mV = 0 \quad\Longrightarrow\quad V = -\tfrac{2}{5}u.$$

所以質點的速度是 $\big(\frac{1}{5}u,\ -\frac{4}{5}u\big)$，楔塊的速度是 $-\frac{2}{5}u$。

**?** **想一想** 為甚麼不能單獨對質點使用能量守恆？

作用於質點的法向反作用力（normal reaction）垂直於斜面 $AC$，但斜面本身正在移動。因此質點的實際速度並不沿 $AC$ 方向，而 $N$ 對質點作功。只有整個系統的能量才守恆，因為這一對法向力所作的總功為零。

質點到達 $AC$ 底部時，已下降了高度 $4a$。對整個系統應用能量守恆，得

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(2m)\Big(\tfrac{1}{25} + \tfrac{16}{25}\Big)u^2 + \tfrac{1}{2}m\cdot\tfrac{4}{25}u^2 &= 2mg\cdot 4a\\ \tfrac{19}{25}u^2 &= 8ga\\ u^2 &= \frac{200ga}{19}.\end{aligned}$$

質點自始至終都留在斜面上。按加速度分解各力，可知法向反作用力是常數 $N = \frac{10}{19}mg > 0$。

### 碰撞時各物體的位置

動量始終為零，所以系統的質心（centre of mass）沒有水平運動。設質點到達桌面時，質點的水平位移為 $x_P$，楔塊的水平位移為 $x_W$。則 $2m\,x_P + m\,x_W = 0$。相對於楔塊，質

點由 $A$ 走到 $C$，水平距離為 $3a$，所以 $x_P - x_W = 3a$。因此

$$x_P = a, \qquad x_W = -2a.$$

在該瞬間，質點位於 $x = 3a + a = 4a$，而頂角 $C$ 位於 $6a - 2a = 4a$。兩者在同一位置，這是必然的，因為質點剛好到達 $C$。

### 反彈與飛行

桌面固定而且光滑，而碰撞是完全彈性（perfectly elastic）的。所以質點的水平速度不變，鉛垂速度則反向。它以速度 $\left(\frac{1}{5}u,\ \frac{4}{5}u\right)$ 離開桌面。它返回桌面所需的飛行時間為

$$T = \frac{2 \cdot \frac{4}{5}u}{g} = \frac{8u}{5g}.$$

飛行期間，它向右水平移動了距離 $\frac{1}{5}u \cdot T = \dfrac{8u^2}{25g}$。

質點離開楔塊之後，楔塊不再受水平力作用，所以它繼續以速率 $\frac{2}{5}u$ 向左運動。在時間 $T$ 內，它移動了 $\frac{2}{5}u \cdot T = \dfrac{16u^2}{25g}$。質點向右運動而楔塊向左運動，所以質點不可能再與楔塊相遇。

$D$ 與 $E$ 之間的距離是這兩段距離之和，因為兩者都由 $x = 4a$ 出發，並向相反方向運動：

$$DE = \frac{8u^2}{25g} + \frac{16u^2}{25g} = \frac{24u^2}{25g} = \frac{24}{25} \cdot \frac{200a}{19} = \frac{192}{19}\,a,$$

正如所求。

## 驗算

- 碰撞時的總動能：$\frac{19}{25}mu^2 = \frac{19}{25} \cdot \frac{200}{19}mga = 8mga$。這等於所失去的位能。
- 動量：$2m \cdot \frac{1}{5}u + m \cdot \left(-\frac{2}{5}u\right) = 0$。
- 取 $a = g = m = 1$，以數值方法逐步計算運動，得 $DE \approx 10.1053$，而 $\frac{192}{19} = 10.10526\ldots$。

## 常見錯誤

- 把質點的速度當作沿 $AC$ 方向。那只是它*相對於*移動中的楔塊的速度。
- 單獨對質點寫出 $\frac{1}{2}(2m)u^2 = 2mg \cdot 4a$。這忽略了楔塊的動能和 $N$ 所作的功。
- 由 $C$ 的原來位置量度 $DE$，而不是由碰撞點 $x = 4a$ 量度；在那一刻，質點和 $C$ 都位於該處。

## STEP 之外

在光滑桌面上滑動的楔塊，是帶有約束（constraints）的系統的經典例子。拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）處理這類系統的方法，是選取適當的坐標（這裏是楔塊的位置和質點沿斜面下滑的距離），使約束力根本無須出現。這樣，水平動量守恆便源於問題在水平平移下的對稱性，這是諾特定理（Noether's theorem）的一個例子。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）涵蓋了運動參考系，以及多體系統中的動量守恆。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。