詳細解答

STEP III 1990，第 11 題

力學 • 剛體轉動

STEP III 1990，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

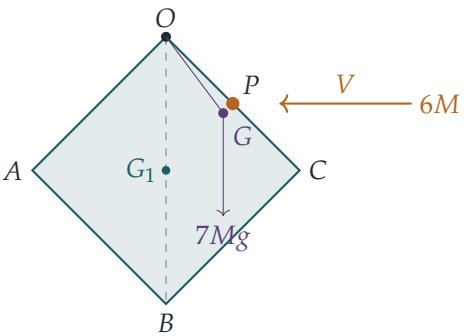
step.maths.org/questions/90-s3-q11

關鍵思路

碰撞在一瞬間發生，其間位於 O 的轉軸會施加一個很大的衝力（impulsive force），所以線動量（linear momentum）並不守恆。不過這個衝量（impulse）作用於 O，因此對 O 沒有力矩（moment）：在整個碰撞過程中，對轉軸的角動量（angular momentum）守恆。碰撞之後，整個系統是一個繞固定軸轉動的剛體（rigid body），只有重力作功，於是能量守恆（conservation of energy）便可告訴我們它能否越過最高點。

解答

我們把薄片（lamina）視為均勻的剛性正方形，把質點視為在碰撞一刻黏附在薄片上的點質量，並假設轉軸光滑。取 O 為原點。當 OB 鉛垂向下時，正方形的中心 G_1 位於深度 $\sqrt{2}a$ 處（即對角線 $2\sqrt{2}a$ 的一半），而 A 和 C 分別位於 OB 兩側、水平距離為 $\sqrt{2}a$ 之處，深度同樣是 $\sqrt{2}a$。因此 OC 的中點 P 與 O 的水平距離為 $a/\sqrt{2}$，深度為 $a/\sqrt{2}$，並且 $OP = a$。



（圖中所示的質點從右方飛來；稍後我們會看到，從左方飛來也會得到相同的答案。）

對轉軸的轉動慣量

對於邊長為 $2a$ 的均勻正方形薄片，它對通過中心並垂直於薄片的軸的轉動慣量（moment of inertia）是 $\frac{1}{12}M((2a)^2+(2a)^2)=\frac{2}{3}Ma^2$（根據垂直軸定理（perpendicular axis theorem），把薄片平面內兩條軸的轉動慣量相加，每條均為 $\frac{1}{3}Ma^2$）。由於 $OG_1=\sqrt{2}\,a$，根據平行軸定理（parallel axis theorem），

$$I_{\text{薄片}}=\tfrac{2}{3}Ma^2+M(\sqrt{2}\,a)^2=\tfrac{8}{3}Ma^2.$$

質點最後停在 P，與 O 相距 a，所以合成後的物體有

$$I=\tfrac{8}{3}Ma^2+6Ma^2=\tfrac{26}{3}Ma^2.$$

碰撞

想一想 為甚麼處理這次碰撞時不能使用線動量守恆？

因為轉軸是固定的：要令 O 保持不動，轉軸必須在碰撞期間向薄片施加一個衝量，而這個衝量是未知的。不過它的作用線通過 O，所以它對 O 的力矩為零，而重力在一瞬間內不會產生衝量。因此對轉軸的角動量守恆。

在碰撞前的一刻，質點對 O 的角動量等於它的動量 $6MV$ 乘以由 O 至其（水平）運動路線的垂直距離，這個距離就是 P 的深度，即 $a/\sqrt{2}$。薄片此時靜止。碰撞剛結束時，整個物體以角速率（angular speed）ω 轉動，所以

$$\tfrac{26}{3}Ma^2\,\omega=6MV\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\qquad\Longrightarrow\qquad\omega=\frac{9V}{13\sqrt{2}\,a}.$$

於是緊接碰撞之後的動能（kinetic energy）為

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{26}{3}Ma^2\cdot\frac{81V^2}{338a^2}=\frac{27}{26}MV^2.$$

作完整的旋轉

合成物體的質心（centre of mass）G（質量為 $7M$）相對於 O 的水平位移和深度分別是

$$\frac{M\cdot 0+6M\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{7M}=\frac{3\sqrt{2}}{7}a,\qquad\frac{M\cdot\sqrt{2}\,a+6M\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{7M}=\frac{4\sqrt{2}}{7}a,$$

所以 $OG=\frac{\sqrt{2}}{7}a\sqrt{3^2+4^2}=\frac{5\sqrt{2}}{7}a$。

這個物體是剛體，並且釘在 O 上，所以（與繫在繩上的質點不同）它不可能「掉離」所走的圓形軌道；它能作完整的旋轉，當且僅當它在勢能（potential energy）最高的位置

仍有正的動能，而這個位置就是 G 在 O 正上方的時候。由起初在 O 之下深度 $\frac{4\sqrt{2}}{7}a$ 處，到在 O 之上高度 $\frac{5\sqrt{2}}{7}a$ 處，G 上升了

$$\frac{4\sqrt{2}}{7}a + \frac{5\sqrt{2}}{7}a = \frac{9\sqrt{2}}{7}a,$$

無論物體向哪一個方向轉動都是如此，所以質點從哪一邊飛來並無影響。碰撞之後只有重力作功（光滑的轉軸不作功），所以根據能量守恆，我們需要

$$\frac{27}{26}MV^2 > 7Mg \cdot \frac{9\sqrt{2}}{7}a = 9\sqrt{2}\,Mga,$$

即

$$\boxed{V^2 > \frac{26\sqrt{2}}{3}ga.}$$

質量 M 被約去了，這是必然的，因為題目中每一個質量都是 M 的倍數。（若剛好取等號，物體只會緩緩趨近最高位置而永遠不會越過它，所以這是嚴格不等式。）

驗算

- 轉動慣量、質心（它與向下鉛垂線所成角的 tan 值為 $\frac{3}{4}$）以及動能係數 $\frac{27}{26}$ 均已用數值方法核實，其中第一項是在傾斜的正方形上以網格積分求得的。
- 取 $a = 1.3$，$g = 9.81$，以數值方法逐步求解運動方程 $I\ddot{\theta} = -7Mg\,x_G$：當 V^2 為 $\frac{26\sqrt{2}}{3}ga \approx 15.6$ 的 98% 時，物體會擺回來；而在 102% 時，它會轉完一整圈，無論質點從哪一邊飛來都是如此。
- 對能量作合理性檢查：質點原有的 $3MV^2$ 動能之中，只有 $\frac{27}{26}MV^2$ 在碰撞後保留下來，這正符合完全非彈性碰撞（perfectly inelastic collision）應有的情況。

常見錯誤

- 在碰撞過程中使用線動量守恆：轉軸會施加衝量，所以線動量並不守恆。
- 以距離 $OP = a$ 作為質點動量的力臂，而沒有使用到其運動路線的垂直距離 $a/\sqrt{2}$。
- 忘記質點黏上之後質心已經偏離 OB，所以升至最高點的高度並不單單是原來深度的兩倍。

STEP 之外

這是剛體繞固定軸轉動的力學：由於轉軸上有衝擊反作用力，在碰撞中守恆的量是角動量，而不是線動量。一個精彩的延伸課題是撞擊中心（centre of percussion）：在這一

點上施加打擊，轉軸完全不會產生衝擊反作用力，這正是板球棒有「甜蜜點」的原因。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）對剛體轉動和角衝量有細緻的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。