詳細解答

STEP III 1990，第 10 題

純數學 • 根與漸近近似

STEP III 1990，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s3-q10

關鍵思路

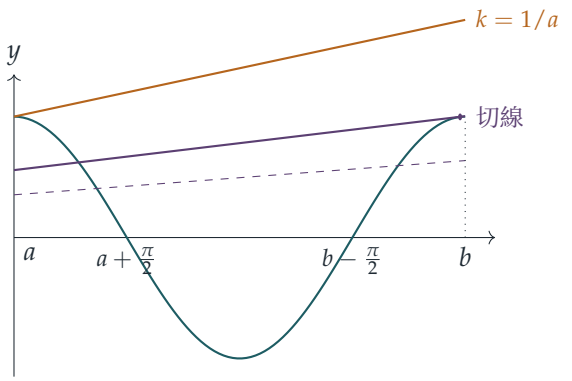
在題目所給的區間內，$\sin x$ 剛好走完一個完整週期，起點和終點都在峯頂，而直線 $y = kx$ 則恆為正，並緩緩上升。根只可能出現在 $\sin x > 0$ 的地方，而這樣的地方分為兩段：一段是 $\sin x$ 下降的部分（最多相交一次），另一段是 $\sin x$ 上升而且是凹函數（concave）的部分（最多相交兩次）。值得留意的臨界情況，是直線剛好與第二個拱形相切之時；把切點寫成在區間右端點左方一小段距離 δ 處，相切條件便化為題目所給的方程。

解答

以下一律記

$$a = (4n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad b = (4n+5)\frac{\pi}{2} = a + 2\pi,$$

於是區間就是 $a < x < b$。由於 $\sin a = \sin b = 1$，$\sin x$ 的圖像由峯頂出發，在 $x = a + \frac{\pi}{2}$ 處降至 0，其後一直為負，直至 $x = a + \frac{3\pi}{2} = b - \frac{\pi}{2}$，然後再回升至 b 處的峯頂。



上圖（按 $n = 1$ 的比例繪畫，原點遠在左方圖外）以藍綠色顯示 $\sin x$，以琥珀色顯示通過 $(a, 1)$ 的直線，以紫紅色實線顯示切線（tangent），另以虛線顯示一條斜率較小、與曲線相交三次的直線。

根的可能數目

由於 $k > 0$ 且 $x > 0$，故 $kx > 0$，所以每個根都位於 $\sin x > 0$ 之處：不是在 $I_1 = (a, a + \frac{\pi}{2})$ 內，就是在 $I_2 = (b - \frac{\pi}{2}, b)$ 內。

在 I_1 上。這裏 $\sin x$ 嚴格遞減（strictly decreasing），而 kx 嚴格遞增（strictly increasing），所以 $kx - \sin x$ 嚴格遞增，最多只有一個根。在右端點處 $kx - \sin x > 0$；在 $x = a$ 處其值為 $ka - 1$。因此，若 $ka < 1$，則 I_1 內恰有一個根；若 $ka \geq 1$，則沒有根（此時在整個區間上 $kx - \sin x > 0$）。

在 I_2 上。設 $f(x) = \sin x - kx$。這裏 $f''(x) = -\sin x < 0$，所以 f 是凹函數，在 I_2 上最多有兩個零點。此外，f 在左端點處 $f < 0$，而 $f(b) = 1 - kb$。

- 若 $kb < 1$，則 f 由負變正，而凹函數在上升途中只能變號一次，所以恰有一個根。當 $kb = 1$ 時結論相同：此時 $f(b) = 0$ 且 $f'(b) = \cos b - k = -k < 0$，所以在 b 的左側附近 $f > 0$，於是 I_2 內有一個根（b 本身這個零點不計在內）。
- 若 $kb > 1$，則 f 在兩端均有 $f < 0$，所以根的數目是 0、1 或 2，分別對應 f 在 I_2 上的最大值為負、為零或為正。最大值為 0 即相切的情況：直線與拱形在某點 $t \in I_2$ 相切，設此時的斜率為 k_t。當 k 由很大的值逐漸減小時，直線隨之下降，所以當 $k > k_t$ 時沒有根，當 $k = k_t$ 時有一個根，而當 $\frac{1}{b} < k < k_t$ 時有兩個根。

在切點處 $k_t t = \sin t < 1$ 且 $t > a$，所以 $k_t < 1/a$；又因為相切的情況滿足 $kb > 1$，故 $k_t > 1/b$。把兩段的結果合起來：

k 的範圍	I_1 內的根數	I_2 內的根數	總數
$k \leq 1/b$	1	1	2
$1/b < k < k_t$	1	2	3
$k = k_t$	1	1	2
$k_t < k < 1/a$	1	0	1
$k \geq 1/a$	0	0	0

所以方程在該區間內可以有 0、1、2 或 3 個根，正如題目所求。

恰有一個根

由上表可見，恰有一個根的充要條件是 $k_t < k < \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$。餘下的工作是描述 k_t。

想一想 怎樣把「直線與曲線相切」寫成方程？

直線 $y = kx$ 與 $y = \sin x$ 在 $x = t$ 處相切，即兩個圖像在該處相交，而且斜率相等：

$$\sin t = k_t t, \qquad \cos t = k_t.$$

點 t 位於 I_2 內，所以可寫 $t = b - \delta$，其中 $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$。由於 $\sin b = 1$ 及 $\cos b = 0$，

$$\sin t = \sin(b - \delta) = \cos\delta, \qquad \cos t = \cos(b - \delta) = \sin\delta.$$

所以由斜率條件得 $k_t = \sin\delta$，而相交條件則變成

$$\cos\delta = \left((4n+5)\frac{\pi}{2} - \delta\right)\sin\delta.$$

因此，恰有一個根的條件是

$$\sin\delta < k < \frac{2}{(4n+1)\pi},$$

其中 δ 如上所述，這正是我們要證明的結果。

n 很大時的近似值

把關於 δ 的方程除以 $\sin\delta$（由於 $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$，它不等於零）：

$$\cot\delta = b - \delta, \qquad \text{即} \qquad \tan\delta = \frac{1}{b-\delta}.$$

由於 $\delta < \frac{\pi}{2}$，右邊小於 $1/(b - \frac{\pi}{2})$，而當 n 很大時這個值很小。所以 δ 很小，$\tan\delta \approx \delta$，且 $b - \delta \approx b$，由此得

$$\delta \approx \frac{1}{b} = \frac{2}{(4n+5)\pi}.$$

要求下一級的近似值，可寫 $\delta = \dfrac{1}{b} + \dfrac{c}{b^3}$，並在兩邊保留至 b^{-3} 的項。左邊是 $\tan\delta = \delta + \frac{1}{3}\delta^3 + \cdots = \dfrac{1}{b} + \dfrac{c + \frac{1}{3}}{b^3} + \cdots$。右邊是

$$\frac{1}{b-\delta} = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{\delta}{b} + \cdots\right) = \frac{1}{b} + \frac{1}{b^3} + \cdots,$$

其中在修正項裏用了 $\delta \approx 1/b$。比較 b^{-3} 的項，得 $c + \frac{1}{3} = 1$，所以 $c = \frac{2}{3}$，於是

$$\delta \approx \frac{1}{b} + \frac{2}{3b^3} = \frac{2}{(4n+5)\pi} + \frac{16}{3(4n+5)^3\pi^3}.$$

（等價的做法是：由 $\delta = 1/b$ 出發，把迭代（iteration）$\delta \mapsto \arctan\dfrac{1}{b-\delta}$ 進行一步，得到 $\arctan\dfrac{b}{b^2-1}$，它的展開式與上式相同。）由此可知，k 的區間的下端是 $\sin\delta \approx \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2b^3}$。

驗算

- 當 $n = 1$ 時，以數值方法解 $\cos\delta = (\frac{9\pi}{2} - \delta)\sin\delta$ 得 $\delta = 0.070973$，而 $1/b = 0.070736$ 及 $1/b + 2/(3b^3) = 0.070971$：改良後的近似值準確了約 150 倍。當 $n = 10$ 時，誤差降至約 5×10^{-10}。
- 取 $n = 1, 2, 3, 5$，並從表中每一行各取一個 k 值，在細密的格點上數算 $kx - \sin x$ 的變號次數，所得的根數 $2, 3, 1, 0$ 與預測完全吻合；而在 $\sin\delta$ 與 $2/((4n+1)\pi)$ 之間隨機選取 k，則每次都得到一個根。

常見錯誤

- 忘記了相切的情況，或者把 $1/b$、k_t 和 $1/a$ 的大小次序弄錯，以致根的數目數錯。
- 在第二級近似中只用 $\tan\delta \approx \delta$，結果得到 $\delta \approx b/(b^2 - 1) \approx 1/b + 1/b^3$。$\tan\delta$ 中的 $\frac{1}{3}\delta^3$ 項與修正項屬同一階，必須保留。

STEP 之外

當方程含有一個很小或很大的參數時，逐步求出其根越來越精確的近似值，這就是*漸近分析*（asymptotic analysis）：把一個以 $1/b$ 的冪寫成的級數代入方程，然後比較係數，做法與這裏完全一樣。把同樣的想法應用於 $\tan x = x$，便可描述該方程的大根，這些根會在熱傳導和振動問題中出現。如想進一步了解這類展開式背後的分析學，可參閱 Bartle 與 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（實分析入門教材）；Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則有更多 STEP 風格的練習。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。