詳細解答

STEP III 1990，第 1 題

純數學 • 倍角與多項式的根

> **STEP III 1990，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q1

關鍵思路

九等於 3×3，所以只要把正切的三倍角公式（triple-angle formula）用兩次，就可以得到 $\tan 9\theta$。這比展開 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^9$ 省事得多。因式分解後的形式還告訴我們，在 $\theta = \pi/9, 2\pi/9, 4\pi/9$ 時是哪一個因式等於零：這些角正好是令 $\tan^2 3\theta = 3$ 的角。由此得出一個以 $u = \tan^2\theta$ 為未知數的三次方程（cubic），餘下的工作就交給韋達公式（Vieta's formulas，即多項式的根與係數之間的關係）。

解答

$\tan 9\theta$ 的公式

設 $t = \tan\theta$ 及 $T = \tan 3\theta$。三倍角公式可由 $\tan(2\theta + \theta)$ 推出，亦可由棣美弗定理（de Moivre's theorem）取 $n = 3$ 得出，它給出

$$T = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{t(t^2 - 3)}{3t^2 - 1}, \qquad \tan 9\theta = \frac{3T - T^3}{1 - 3T^2} = \frac{T(3 - T^2)}{1 - 3T^2}.$$

現在把 $3 - T^2$ 和 $1 - 3T^2$ 都寫成以 $(1 - 3t^2)^2$ 為公分母的形式：

$$\begin{aligned}(1 - 3t^2)^2(3 - T^2) &= 3(1 - 3t^2)^2 - t^2(3 - t^2)^2 \\ &= (3 - 18t^2 + 27t^4) - (9t^2 - 6t^4 + t^6) \\ &= -(t^6 - 33t^4 + 27t^2 - 3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1 - 3t^2)^2(1 - 3T^2) &= (1 - 3t^2)^2 - 3t^2(3 - t^2)^2 \\ &= (1 - 6t^2 + 9t^4) - (27t^2 - 18t^4 + 3t^6) \\ &= -(3t^6 - 27t^4 + 33t^2 - 1).\end{aligned}$$

兩式相除時，因子 $-(1-3t^2)^{-2}$ 互相約去，所以

$$\tan 9\theta = \frac{t(t^2-3)}{3t^2-1}\cdot\frac{t^6-33t^4+27t^2-3}{3t^6-27t^4+33t^2-1},$$

這就是所求的結果。

若改用棣美弗定理，則 $\tan 9\theta = \operatorname{Im}(1+\mathrm{i}t)^9 / \operatorname{Re}(1+\mathrm{i}t)^9$。這樣便要再驗證

$$9t-84t^3+126t^5-36t^7+t^9 \quad \text{和} \quad 1-36t^2+126t^4-84t^6+9t^8$$

確實可以分解成上面的分子和分母。它們的確可以，但經由 $\tan 3\theta$ 這條路，因式分解是現成的，不費工夫。

三次方程

設 $P(t) = t^6-33t^4+27t^2-3$。上面第一個計算表明

$$3-\tan^2 3\theta = -\frac{P(t)}{(1-3t^2)^2} \qquad \text{只要} 3t^2 \neq 1.$$

現在取 $\theta = \pi/9,\ 2\pi/9,\ 4\pi/9$。這時 $3\theta = \pi/3,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3$，而每一個情況都有 $\tan 3\theta = \pm\sqrt{3}$，所以 $\tan^2 3\theta = 3$。每一個情況下 3θ 都不是 $\pi/6$ 的奇數倍，所以 $3t^2 \neq 1$（否則 $\tan 3\theta$ 便沒有定義）。因此，對這三個角都有 $P(\tan\theta) = 0$。

在 $(0, \pi/2)$ 之內，這些正好是令 $\tan 9\theta = 0$ 的原因在於因式 P，而不在於 t 或 t^2-3 的角。事實上，$t \neq 0$，而且因為 $\theta \neq \pi/3$，所以 $t^2 \neq 3$。

想一想 我們怎樣知道這三個數就是該三次方程的全部根，而且沒有重根？

令 $u = t^2$。$\tan^2(\pi/9)$、$\tan^2(2\pi/9)$、$\tan^2(4\pi/9)$ 每一個都是

$$u^3-33u^2+27u-3 = 0.$$

的根。這三個值互不相同，因為 tan 在 $(0, \pi/2)$ 上取正值且嚴格遞增（strictly increasing），而 $\pi/9 < 2\pi/9 < 4\pi/9 < \pi/2$。三次方程最多有三個根，所以這三個數正好就是它的全部根。這就是所求的整數係數三次方程。

乘積

根據韋達公式，$u^3-33u^2+27u-3$ 的根之積是 3：

$$\tan^2\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\tan^2\left(\tfrac{2\pi}{9}\right)\tan^2\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = 3.$$

三個角都在 $(0, \pi/2)$ 之內，所以每個正切值都是正數，我們取正平方根：

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\tan\left(\tfrac{2\pi}{9}\right)\tan\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = \sqrt{3}.$$

六次方之和

設三個根為 u_1, u_2, u_3。由該三次方程可知

$$e_1 = u_1 + u_2 + u_3 = 33, \qquad e_2 = u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = 27, \qquad e_3 = u_1u_2u_3 = 3.$$

我們要求的是 $u_1^3 + u_2^3 + u_3^3$，也就是三個正切值的六次方之和。

> **想一想** 不把根求出來，怎樣由 e_1, e_2, e_3 得到立方和？

每個根都滿足 $u_i^3 = 33u_i^2 - 27u_i + 3$。把這三條等式相加，得

$$\sum u_i^3 = 33\sum u_i^2 - 27\sum u_i + 9.$$

這裏 $\sum u_i = 33$，而

$$\sum u_i^2 = e_1^2 - 2e_2 = 1089 - 54 = 1035.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum u_i^3 &= 33 \times 1035 - 27 \times 33 + 9\\ &= 34155 - 891 + 9\\ &= 33273.\end{aligned}$$

也就是說，

$$\tan^6\left(\tfrac{\pi}{9}\right) + \tan^6\left(\tfrac{2\pi}{9}\right) + \tan^6\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = 33273,$$

正如所求。等價地，$\sum u_i^3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 = 35937 - 2673 + 9$。

驗算

- 以數值計算，$\tan^2(\pi/9) \approx 0.1325$、$\tan^2(2\pi/9) \approx 0.7041$ 及 $\tan^2(4\pi/9) \approx 32.163$。它們的和是 33.000，積是 3.000。
- 三個正切值的積是 $1.7320508\ldots = \sqrt{3}$。
- 上述三個值的立方和是 33273.0。它幾乎全部來自 $\tan^6(4\pi/9) \approx 33272.4$。
- 隨機取數千個 θ 的值，$\tan 9\theta$ 的公式與計算機的結果吻合至約十二位有效數字。
- 簡單情況：取 $t = 1$，即 $\theta = \pi/4$。公式給出 $\frac{1\cdot(-2)(-8)}{2\cdot 8} = 1 = \tan(9\pi/4)$。

常見錯誤

- 未先檢查 $3t^2 \neq 1$（或分母不為零），就斷定那個六次因式等於零。

- 把乘積取為 $-\sqrt{3}$。每個角都是銳角，所以每個正切值都是正數。
- 寫成 $\sum u_i^3 = e_1^3 - 3e_1e_2$ 而漏掉 $+3e_3$ 一項，結果得出 33264。

STEP 之外

三次多項式 $u^3 - 33u^2 + 27u - 3$ 沒有有理根，所以它在 Q 上不可約（irreducible）。它又有三個實根。伽羅華理論（Galois theory）表明，這類三次多項式的根不能單靠實數根式表示出來（即所謂不可約情形（casus irreducibilis））。正因如此，像 $\tan^2(\pi/9)$ 這樣的三角表達式才是寫出這些根的自然方式。至於根的冪和，一般由牛頓恆等式（Newton's identities）支配。想了解棣美弗定理的幾何一面，可讀 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以圖像方式講解複分析）。代數方面，可讀 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（環、域與羣的入門書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。