詳細解答

STEP II 1990，第 9 題

純數學 • 極坐標曲線與弧長

STEP II 1990，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s2-q9

關鍵思路

兩條曲線都以 θ 表示 r，所以可以逐條射線比較：從原點出發的每條半直線上，拋物線（parabola）恰好有一點，而這一點不是在心臟線（cardioid）之內，就是在其外。這樣立刻就知道拋物線在哪裏進入和離開心臟線。至於長度，心臟線最好保留極坐標（polar）形式（其弧長（arc length）的被積函數（integrand）用半角恆等式（half-angle identity）便可大幅化簡），而拋物線則用直角坐標（Cartesian）形式容易得多。

解答

兩條曲線

對拋物線而言，$r + r\cos\theta = 1$ 即 $r = 1 - x$。兩邊平方，得 $x^2 + y^2 = (1-x)^2$，所以

$$y^2 = 1 - 2x.$$

這是一條焦點（focus）在原點、頂點（vertex）在 $(\frac{1}{2}, 0)$、開口向左的拋物線。原點位於它凹的一側，即 $y^2 < 1 - 2x$ 的一側；我們稱這一側為拋物線的內部。

心臟線 $r = 4(1+\cos\theta)$ 的尖點（cusp）在原點（當 $\theta = \pi$ 時），並在 $\theta = 0$ 時到達 $x = 8$。

兩曲線的交點

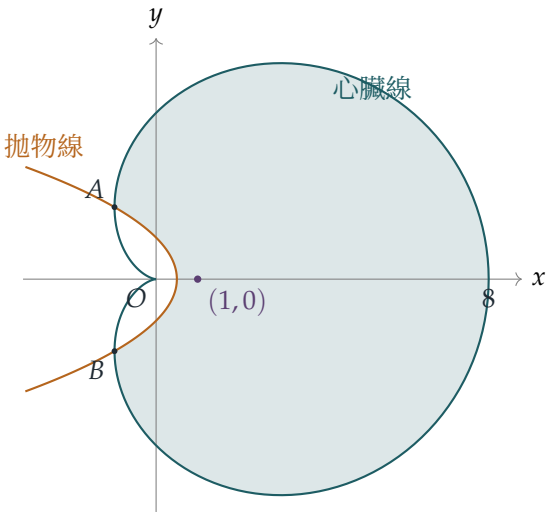
固定一個方向 θ，其中 $-\pi < \theta < \pi$，使得 $1 + \cos\theta > 0$。在這條射線上，拋物線與原點的距離為 $1/(1+\cos\theta)$，心臟線的邊界與原點的距離為 $4(1+\cos\theta)$，而心臟線的內部就是射線上位於邊界之前的那一段。所以拋物線上的點在心臟線之內，當且僅當

$$\frac{1}{1+\cos\theta} < 4(1+\cos\theta) \iff (1+\cos\theta)^2 > \tfrac{1}{4} \iff \cos\theta > -\tfrac{1}{2} \iff |\theta| < \tfrac{2\pi}{3},$$

其中我們乘以正數 $1+\cos\theta$，並取了正平方根。等號在 $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$ 時成立，此時 $r = 2$，得出兩個交點

$$A = (-1, \sqrt{3}), \qquad B = (-1, -\sqrt{3}).$$

所以拋物線在心臟線之內的部分是一段連續不斷的弧，由 B 經頂點 $(\frac{1}{2}, 0)$ 到 A，其餘部分全在心臟線之外。這段弧連接心臟線邊界上的兩點，因此把心臟線的內部分成兩部分：一部分在拋物線之內（包含原點，以心臟線在尖點附近的小環為邊界），另一部分在拋物線之外（以心臟線外側的大弧為邊界）。



（草圖中可見一個巧妙的細節：$x = 4(1+\cos\theta)\cos\theta = (2\cos\theta+1)^2 - 1 \geq -1$，所以 A 和 B 也是心臟線上最左邊的點。）

邊界的長度

$r = 1$、$\theta = 0$ 所表示的點是 $(1,0)$。它在心臟線之內（$1 < 8$），又在拋物線之外（$0^2 > 1 - 2$），所以位於陰影部分。這部分的邊界由心臟線的弧 $-\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ 和拋物線由 B 到 A 的弧組成。

心臟線的弧。在極坐標中，$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + (\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$。這裏 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -4\sin\theta$，所以

$$r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = 16(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta) = 32(1+\cos\theta) = 64\cos^2\tfrac{\theta}{2}.$$

想一想 我們可以直接寫 $\sqrt{64\cos^2(\theta/2)} = 8\cos(\theta/2)$ 嗎？

可以，但全因為在整個範圍內 $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$：當 $|\theta| \leq \frac{2\pi}{3}$ 時，有 $|\frac{\theta}{2}| \leq \frac{\pi}{3}$。利用圖形對 x 軸的對稱性，

$$L_{\text{心臟線}} = 2\int_0^{2\pi/3} 8\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 32\left[\sin\tfrac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi/3} = 32\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}.$$

拋物線的弧。以 y 為參數（parameter）：$x = \frac{1}{2}(1-y^2)$，所以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = -y$，而 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y$，其中 y 由 $-\sqrt{3}$ 變到 $\sqrt{3}$。由對稱性，

$$L_{\text{拋物線}} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

設 $y = \sinh u$，$\mathrm{d}y = \cosh u\,\mathrm{d}u$，被積函數變成 $\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1+\cosh 2u)$，所以

$$\int \sqrt{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\sinh 2u = \tfrac{1}{2}(\operatorname{arsinh} y + y\sqrt{1+y^2}) + C.$$

當 $y = \sqrt{3}$ 時，$\sqrt{1+y^2} = 2$，而 $\operatorname{arsinh}\sqrt{3} = \ln(\sqrt{3}+2)$，所以

$$L_{\text{拋物線}} = \Big[\operatorname{arsinh} y + y\sqrt{1+y^2}\Big]_0^{\sqrt{3}} = \ln(2+\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}.$$

總長度。兩者相加，

$$L = 16\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}),$$

這正是所要求的結果。

驗算

- 整條心臟線的長度是 $\int_{-\pi}^{\pi} 8\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 32$，而我們所用的外側弧長 $16\sqrt{3} \approx 27.71$ 佔了其中大部分，與草圖吻合：尖點附近的小環長度為 $32 - 16\sqrt{3} \approx 4.29$。
- 拋物線的弧長約為 4.78，比由 B 到頂點 $(\frac{1}{2},0)$ 再到 A 的兩條直線段的總長度 $2\sqrt{1.5^2+3} \approx 4.58$ 稍長，這是理所當然的。
- 數值上，對兩條曲線的極坐標弧長被積函數用中點法則（midpoint rule）作數值積分（quadrature），所得總和為 32.49387，與 $18\sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) \approx 32.49387$ 一致。

常見錯誤

- 選錯了部分：$(1,0)$ 在拋物線之外（在其頂點 $x = \frac{1}{2}$ 的右方），所以它所在部分的邊界用的是心臟線外側的大弧，而不是尖點附近的小環。
- 用 $8\cos\frac{\theta}{2}$ 一口氣把心臟線由 0 積分到 2π，但這個式子在 $\theta > \pi$ 時變成負數；被積函數應是 $8\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$。

STEP 之外

兩條曲線都是圓錐曲線（conic）或蚶線（limaçon），寫成以焦點或尖點為極點（pole）的形式；而 $r = \ell/(1+e\cos\theta)$ 正是圓錐曲線在軌道力學（orbital mechanics）中出現的

形式，太陽位於焦點。弧長公式 $\int \sqrt{r^2 + r'^2}\,\mathrm{d}\theta$ 是參數曲線（parametrised curve）長度 $\int |\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$ 的特殊情況，後者在大學一年級的向量微積分（vector calculus）中會進一步引出曲率（curvature）和線積分（line integral）。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）用圓錐曲線的極坐標形式推導出開普勒（Kepler）軌道。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。