詳細解答

STEP II 1990，第 8 題

純數學 • 分部積分法

> **STEP II 1990，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q8

關鍵思路

微分方程（differential equation）的每一項都是，或者幾乎是，一個全導數（exact derivative）。由於 y 和 y' 在 $t = 0$ 與 $t = 1$ 取相同的值，這些全導數的積分都等於零。每一條關係式的做法，都是把方程乘以一個合適的函數，然後反覆使用分部積分法（integration by parts），直至所有邊界項（boundary term）都消失。不妨先列出能令邊界項消失的事實：$x(0) = 0$、$y(0) = y(1)$、$y'(0) = y'(1)$，以及（待我們證明之後）$x(1) = 0$。

解答

第一條恆等式

由於 $x' = y$，被積函數（integrand）$xy = xx'$ 正是 $\frac{1}{2}x^2$ 的導數。所以

$$\int_0^1 x(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\tfrac{1}{2}x(t)^2\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}[x(1)]^2,$$

因為 $x(0) = \int_0^0 y(u)\,\mathrm{d}u = 0$。這就是所要求的結果。

證明 $x(1) = 0$

把 $(*)$ 的中間項寫成全導數：

$$(y^2 - 1)\,y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\tfrac{1}{3}y^3 - y\Big).$$

現在把 $(*)$ 由 0 到 1 逐項積分：

$$\Big[y'\Big]_0^1 + \Big[\tfrac{1}{3}y^3 - y\Big]_0^1 + \int_0^1 y\,\mathrm{d}t = 0.$$

第一個括號等於 $y'(1) - y'(0) = 0$，第二個括號等於零則是因為 $y(1) = y(0)$。根據 x 的定義，餘下的積分就是 $x(1)$。因此 $x(1) = 0$。

關係式 $\int y^2 = \frac{1}{3}\int y^4$

把 $(*)$ 乘以 x，然後在 $[0,1]$ 上積分。這樣會得到三個積分，我們逐一處理。

最後一項。由第一條恆等式和 $x(1) = 0$，可得

$$\int_0^1 x\,y\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}[x(1)]^2 = 0.$$

y'' 項。我們使用分部積分法，對 x 求導（於是 $x' = y$）：

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,y''\,\mathrm{d}t &= \Big[x\,y'\Big]_0^1 - \int_0^1 y\,y'\,\mathrm{d}t \\ &= x(1)y'(1) - x(0)y'(0) - \Big[\tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1 = 0,\end{aligned}$$

因為 $x(1) = x(0) = 0$ 而且 $y(1) = y(0)$。

想一想 我們應該怎樣對 $x\,(y^2-1)\,y'$ 進行分部積分？應該對哪一個因子積分？

中間項。對因子 $(y^2-1)y'$ 積分（我們已經知道它是 $\frac{1}{3}y^3 - y$ 的導數），並對 x 求導：

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,(y^2-1)\,y'\,\mathrm{d}t &= \Big[x(\tfrac{1}{3}y^3 - y)\Big]_0^1 - \int_0^1 y(\tfrac{1}{3}y^3 - y)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - \tfrac{1}{3}\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}t + \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

邊界項消失，是因為 x 在兩個端點都等於零。

把三部分相加，結果為零：

$$\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t - \tfrac{1}{3}\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{即} \qquad \int_0^1 [y(t)]^2\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}\int_0^1 [y(t)]^4\,\mathrm{d}t,$$

這正是所要求的結果。

關係式 $\int y'^2 = \int y^2$

想一想 我們想得到 y'^2 的積分。乘以哪一個函數才會產生它？

對 $y\,y''$ 進行分部積分會產生 $-\int y'^2$，所以這次我們把 $(*)$ 乘以 y 再積分。逐項計算：

$$\int_0^1 y\,y''\,\mathrm{d}t = \Big[y\,y'\Big]_0^1 - \int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^1 (y^3 - y)\,y'\,\mathrm{d}t = \Big[\tfrac{1}{4}y^4 - \tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1 = 0.$$

邊界項 $y(1)y'(1) - y(0)y'(0)$ 等於零，因為 y 和 y' 的值都會重複。第二行等於零，是因為 $y(1) = y(0)$。餘下的就是

$$-\int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{所以} \qquad \int_0^1 [y'(t)]^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 [y(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

驗算

第一條恆等式對任何 y 都成立。取 $y = \cos 3t + t^2 - 0.7e^t$，以數值積分（quadrature）計算可得 $\int_0^1 xy\,\mathrm{d}t \approx 0.338191$，與 $\frac{1}{2}x(1)^2$ 相等。

$(*)$ 並沒有在時間 1 之後重複的非平凡解（non-trivial solution）（見下文）。不過，對於任何在時間 T 之後重複的解，同樣的論證可以一字不改地套用到 $[0, T]$ 上。我們以數值方法對 $(*)$ 積分，直至解落在它的週期軌道（periodic orbit）上，其週期為 $T \approx 6.6633$。在一個週期內，我們求得 $\int y \approx 10^{-9}$、$\int y^2 \approx 13.72222$、$\frac{1}{3}\int y^4 \approx 13.72222$ 和 $\int y'^2 \approx 13.72228$，這些數值在步長誤差範圍內吻合。

常見錯誤

- 忘記第三部分需要用到 $x(1) = 0$。沒有這個條件，$\int xy$ 和各個邊界項都不會消失。
- 在中間項中對 x 積分，而不是對 $(y^2 - 1)y'$ 積分。正是利用了 $x' = y$，積分才能化簡成 y 的冪。
- 說邊界項等於零是「因為 $y(0) = 0$」。題目並沒有給出這個條件。邊界項消失，是因為在 0 和 1 處的值相等。

STEP 之外

方程 $(*)$ 是范德波爾振盪器（van der Pol oscillator），是自持振盪電路的經典模型。它只有一條週期軌道，而你所證明的關係式，就是沿一個循環的能量平衡。這些關係式還揭示了一個意想不到的事實。由於 $\int_0^1 y = 0$，由傅立葉級數（Fourier series）得出的維廷格（Wirtinger）不等式（又稱龐加萊（Poincaré）不等式）給出 $\int_0^1 y'^2 \geq 4\pi^2 \int_0^1 y^2$。結合最後一條關係式，這就迫使 $y \equiv 0$。所以在時間 1 之後重複的解只有平凡解，因為真正的週期約為 6.66。想進一步了解週期軌道和極限環（limit cycle），可參閱 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教材）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。