詳細解答

STEP II 1990，第 7 題

純數學 • 微分方程

> **STEP II 1990，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q7

關鍵思路

以指數函數作試解（trial solution），可把時滯方程（delay equation）化為關於 p 的普通方程，因為時間平移只是把 e^{pt} 乘以一個常數。方程 $(*)$ 同時含有 p 和 e^{-p}，所以無法精確求解；但全式乘以 e^{p} 後，所有含 p 的部分都歸到同一邊：方程的根就是單一條曲線 $y=(p+1)\mathrm{e}^{p}$ 與水平線 $y=k$ 的交點。於是，數算根的個數就變成描繪一條曲線的問題。

解答

關於 p 的方程

設 $\mathrm{f}(t)=A\mathrm{e}^{pt}$，其中 $A\neq 0$（我們要的是非零解）。則 $\mathrm{f}'(t)=pA\mathrm{e}^{pt}$，而 $\mathrm{f}(t-1)=A\mathrm{e}^{p(t-1)}=\mathrm{e}^{-p}A\mathrm{e}^{pt}$，所以 $(\dagger)$ 變成

$$A\mathrm{e}^{pt}(p+1-k\mathrm{e}^{-p})=0 \quad \text{對所有} t.$$

由於 $A\neq 0$ 且 $\mathrm{e}^{pt}>0$，上式對所有 t 成立，當且僅當

$$p+1=k\mathrm{e}^{-p},$$

這正是 $(*)$。因此，這種形式的解存在，恰好是當 p 為 $(*)$ 的實根之時，而此時任何 A 都可以。

有多少個實根？

把 $(*)$ 乘以 $\mathrm{e}^{p}>0$，得到等價的方程

$$g(p)=k, \qquad \text{其中} g(p)=(p+1)\mathrm{e}^{p}.$$

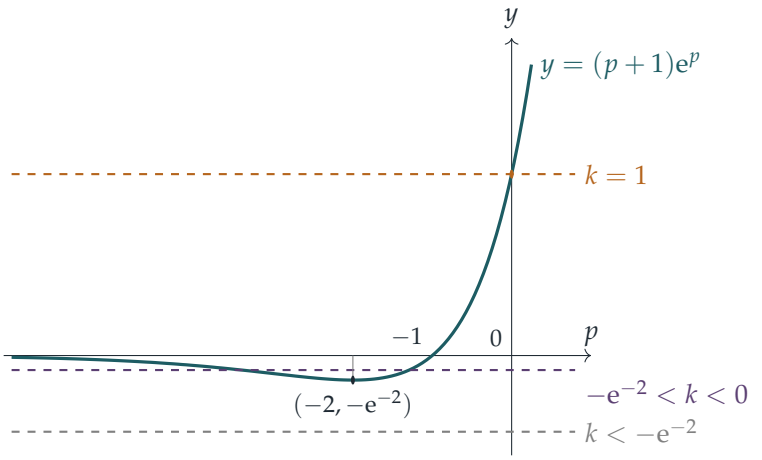
所以我們要數的是曲線 $y = g(p)$ 與水平線 $y = k$ 的交點數目。

> **想一想** $y = (p+1)\mathrm{e}^p$ 的圖像是甚麼模樣？它在哪裏取得最小值？兩端的走勢又如何？

求導得 $g'(p) = \mathrm{e}^p + (p+1)\mathrm{e}^p = (p+2)\mathrm{e}^p$，當 $p < -2$ 時為負，當 $p > -2$ 時為正。所以 g 在 $(-\infty, -2]$ 上遞減，在 $[-2, \infty)$ 上遞增，並有全域最小值（global minimum）

$$g(-2) = -\mathrm{e}^{-2}.$$

在兩端：當 $p \to \infty$ 時 $g(p) \to \infty$；當 $p \to -\infty$ 時 $g(p) \to 0$（指數衰減壓倒線性增長）；當 $p < -1$ 時因子 $p+1$ 為負，所以 g 從下方趨近 0。曲線只在 $p = -1$ 處穿過橫軸，且 $g(0) = 1$。



從圖中讀出結論（上面的單調性（monotonicity）令論證嚴格）：

- $k > 0$：在 $(-\infty, -1]$ 上有 $g \le 0 < k$，而在 $(-1, \infty)$ 上 g 由 0 嚴格遞增至 ∞，所以**恰有一個**根，且它滿足 $p > -1$。
- $-\mathrm{e}^{-2} < k < 0$：在 $(-\infty, -2]$ 上，g 由接近 0 的值嚴格遞減至 $-\mathrm{e}^{-2}$，所以它取值 k 一次；在 $[-2, -1]$ 上它由 $-\mathrm{e}^{-2}$ 嚴格遞增至 0，所以它再取值 k 一次；當 $p > -1$ 時，$g > 0 > k$。因此有**兩個**根，一個在 $(-\infty, -2)$ 內，一個在 $(-2, -1)$ 內。
- $k = -\mathrm{e}^{-2}$：直線與曲線在最低點相切，得出**唯**一的根 $p = -2$。
- $k < -\mathrm{e}^{-2}$：直線位於整條曲線之下，所以**沒有**根。

所以 $(*)$ 的實根數目視乎 k 而為 0、1 或 2，正如題目所求；而形如 $A\mathrm{e}^{pt}$ 的解存在，恰好是當

$$k \ge -\mathrm{e}^{-2}, \quad k \ne 0.$$

（題目已排除 $k = 0$ 這個值；它會給出單一的根 $p = -1$。）

解在甚麼時候衰減？

? **想一想** 哪些 p 會令 $Ae^{pt} \to 0$？不解 $(*)$ 的話，怎樣判斷根相對於 0 的位置？

在 $A \neq 0$ 之下，$Ae^{pt} \to 0$（當 $t \to +\infty$）當且僅當 $p < 0$。我們從來不需要把根明確求出，只需知道它們相對於 0 的位置。

- 若 $-e^{-2} \leq k < 0$，每個根都在 $(-\infty, -1)$ 內（事實上當 $p \geq -1$ 時 $g \geq 0$，所以 $g(p) = k < 0$ 必然導致 $p < -1$）。所有這些解都會衰減。
- 若 $k > 0$，唯一的根位於 g 嚴格遞增的範圍內，所以 $p < 0 \iff g(p) < g(0) \iff k < 1$。當 $k = 1$ 時，根是 $p = 0$，給出常數解 $f = A$，它並不趨向零；當 $k > 1$ 時，根為正數，解會增長。

因此，當 $t \to +\infty$ 時解趨向零，恰好是當

$$-e^{-2} \leq k < 1, \quad k \neq 0.$$

驗算

- $k = 1$：$p = 0$ 滿足 $0 + 1 = 1 \cdot e^0$，而 $f = A$ 顯然是 $f' + f - f(t-1) = 0$ 的解。這正好是衰減與增長之間的分界，合乎預期。
- $k = -e^{-2} \approx -0.1353$：$p = -2$ 給出 $-1 = -e^{-2}e^2$。數值上，$k = -0.13$ 給出兩個根 $p \approx -2.311$ 和 $p \approx -1.742$，分別在 -2 的兩側，而 $k = -0.14$ 則沒有根。
- 物理意義：沒有反饋（feedback）時（$k \to 0$），系統是 $f' = -f$，衰減率為 $p = -1$，這正是 $|k|$ 很小時根所在的位置。強的正反饋（$k > 1$）會蓋過阻尼（damping），令解增長。

常見錯誤

- 把 $y = p + 1$ 與 $y = ke^{-p}$ 畫在一起比較，卻忽略了當 $k < 0$ 時直線可以與曲線相交兩次，也可以完全不相交；改用 $g(p) = (p+1)e^p$，相切（tangency）的條件會較容易找到。
- 遺漏端點 $k = -e^{-2}$；它確實給出一個（重）根 $p = -2$，因而有一個衰減的解。
- 把 $k = 1$ 納入衰減的範圍：$p = 0$ 給出的是常數解，而不是衰減的解。

STEP 之外

方程 (†) 是一個時滯微分方程（delay differential equation），而 $(*)$ 是它的特徵方程（characteristic equation）。與一般的線性常微分方程（ODE）不同，它有無窮多個複數根 p，而通解是由所有這些根構成的，所以要完全穩定，就需要每個複數根的實部都是負數；這是控制理論（control theory）研究的課題。$(p+1)\mathrm{e}^{p} = k$ 的實根是朗伯（Lambert）W 函數的值：$p + 1 = W(k\mathrm{e})$，而 $-\mathrm{e}^{-1}$（這裏即 $k\mathrm{e} = -\mathrm{e}^{-1}$）正好是 W 的分支點（branch point）。關於線性常微分方程和特徵方程，可參看 Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。