詳細解答

STEP II 1990，第 6 題

純數學 • 整數不等式與分數

STEP II 1990，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s2-q6

關鍵思路

一切都建基於整數（integer）的一個事實：整數之間的嚴格不等式（strict inequality）可以收緊 1。若 $a < b$，則 $b \geq a + 1$；若 $d < c$，則 $d \leq c - 1$。這樣一來，(ii) 就變成一行便可完成的估計。其後各部分都是把 (ii) 應用於巧妙選取的整數：先把分數不等式中的分母消去，再把所得的整數不等式代回 (ii)。

解答

以下所有字母均代表正整數（positive integer）。

第 (i) 部分

由於 $b > a \geq 1$ 而 b 是整數，故 $b \geq 2$。兩邊乘以 $c > 0$ 得 $bc \geq 2c$。

由於 $c > 1$ 而 c 是整數，故 $c \geq 2$，所以 $2c = c + c \geq c + 2$。合起來便得 $bc \geq 2c \geq 2 + c$，正是所求。

第 (ii) 部分

因為兩個不等式都是嚴格的，而各數均為整數，所以 $b \geq a + 1$ 及 $d \leq c - 1$。在前者用上 $c > 0$，在後者用上 $a > 0$，

$$\begin{aligned} bc - ad &\geq (a+1)c - a(c-1) \\ &= ac + c - ac + a \\ &= a + c. \end{aligned}$$

所以 $bc-ad \geq a+c$，而等號成立當且僅當 $b=a+1$ 及 $d=c-1$。

（這與 (i) 所用的「收緊 1」技巧相同；(i) 只是熱身，之後不會再用到。）

第 (iii) 部分

利用 $b,d>0$，把兩個不等式乘開：

$$\frac{a}{b}<p \iff a<bp, \qquad p<\frac{c}{d} \iff dp<c.$$

現在應用 (ii)，把 b 換成 bp，把 d 換成 dp（兩者都是正整數）。所需的假設 $a<bp$ 和 $dp<c$ 正是我們已有的，所以

$$(bp)c-a(dp)\geq a+c, \qquad \text{即} \qquad (bc-ad)p\geq a+c.$$

第 (iv) 部分

消去分母（全部為正數），得到兩個整數不等式：

$$aq<bp \qquad \text{及} \qquad dp<cq.$$

此外 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，所以 $ad<bc$，而 $bc-ad$ 是一個正整數；因此我們可以除以它而無須把任何不等號反轉。

> **想一想** 應該由哪四個數來擔當 (ii) 中 a,b,c,d 的角色？

我們有兩個嚴格不等式，而 (ii) 正好需要兩個：「第一個 < 第二個」和「第四個 < 第三個」。配對的自然方法有兩種，每種各給出其中一個下界。

p 的下界。取 $aq<bp$ 作為「$a<b$」那個不等式，取 $dp<cq$ 作為「$d<c$」那個。把第 (ii) 部分應用於 $aq,\ bp,\ cq,\ dp$，得

$$(bp)(cq)-(aq)(dp)\geq aq+cq, \qquad \text{所以} \qquad pq(bc-ad)\geq q(a+c).$$

先除以 $q>0$，再除以 $bc-ad>0$，

$$p\geq \frac{a+c}{bc-ad}.$$

q 的下界。現在把角色對調：取 $dp<cq$ 作為「$a<b$」那個不等式，取 $aq<bp$ 作為「$d<c$」那個。把第 (ii) 部分應用於 $dp,\ cq,\ bp,\ aq$，得

$$(cq)(bp)-(dp)(aq)\geq dp+bp, \qquad \text{所以} \qquad pq(bc-ad)\geq p(b+d).$$

除以 $p>0$，再除以 $bc-ad>0$，

$$q\geq \frac{b+d}{bc-ad}.$$

兩個下界都已證明。（第 (iii) 部分是第一個下界在 $q=1$ 時的特殊情況。）

介乎 8/9 與 9/10 之間的分數

取 $a = 8$、$b = 9$、$c = 9$、$d = 10$。那麼

$$bc - ad = 81 - 80 = 1,$$

所以任何嚴格介乎 8/9 與 9/10 之間的分數 p/q（其中 p, q 為正整數，不論是否最簡分數（lowest terms））都滿足

$$p \geq \frac{8+9}{1} = 17, \qquad q \geq \frac{9+10}{1} = 19.$$

因此，小於 20 的分母必定恰好是 $q = 19$。這時我們需要

$$\frac{8}{9} < \frac{p}{19} < \frac{9}{10} \iff \frac{152}{9} < p < \frac{171}{10} \iff 16.88\ldots < p < 17.1,$$

所以 $p = 17$。而 17/19 的確落在這個區間內，因為 $8 \cdot 19 = 152 < 153 = 9 \cdot 17$ 及 $17 \cdot 10 = 170 < 171 = 9 \cdot 19$。

因此，介乎 8/9 與 9/10 之間而分母小於 20 的分數只有

$$\frac{17}{19}.$$

由於下界 $q \geq 19$ 適用於分數的每一種寫法，而不限於最簡形式，所以像 34/38 這類未約簡的寫法，也不可能以更小的分母混進來。

驗算

- 17/19 是中間分數（mediant）$\frac{8+9}{9+10}$，而 (iv) 中兩個下界都由它達到，這是個好兆頭，說明這些下界是最佳的。
- 小數：$8/9 \approx 0.8889$，$17/19 \approx 0.8947$，$9/10 = 0.9$。
- 我們對不超過 29 的所有數值檢驗了 (i) 和 (ii)，以約 60,000 個隨機例子檢驗了 (iii) 和 (iv)，並用窮舉法（brute force）列出所有介乎 8/9 與 9/10 之間而 $q \leq 19$ 的 p/q：只有 17/19 出現。

常見錯誤

- 在 (iv) 中除以該數之前，忘記說明 $bc - ad > 0$。
- 在最後一部分只用 p 的下界。它容許 q 最大為 19，但單憑它並不能排除更小的分母；真正起作用的是 q 的下界。
- 在 (iv) 中只從 (ii) 得到一個下界：第二個下界需要把兩個不等式的角色對調。

STEP 之外

滿足 $bc - ad = 1$ 的兩個分數 $a/b < c/d$ 稱為法里相鄰分數（Farey neighbours），而本題證明了關於它們的關鍵事實：介乎兩者之間而分母最小的分數，就是它們的中間分數 $\frac{a+c}{b+d}$。不斷插入中間分數，便可建構出法里數列（Farey sequences）和 Stern–Brocot 樹（Stern–Brocot tree）；它們把每個正有理數（rational）恰好列出一次，並與連分數（continued fractions）以及實數的最佳有理逼近（best rational approximations）密切相關。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是閱讀連分數與逼近理論的絕佳讀物。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。