詳細解答

STEP II 1990，第 5 題

純數學 • 複數與圓

> **STEP II 1990，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q5

關鍵思路

在圓 $|z| = r$ 上，取共軛（conjugation）就等於做除法：$\bar{z} = r^2/z$。這樣一來，「這個比是純虛數（purely imaginary）」（判斷兩個方向互相垂直的準則）就化成一個簡潔的多項式條件 $lm + pq = 0$。此後，題目餘下的部分只是一路追蹤下去：每條垂直的弦（chord）都以形如 $z \mapsto c/z$ 的公式給出新的點，你只須把這些映射複合（compose）起來，看看結果是甚麼。

解答

垂直的判別準則

設 S 的半徑為 r，則 $|l| = |m| = |p| = |q| = r$，因此

$$\bar{l} = \frac{r^2}{l}, \qquad \bar{m} = \frac{r^2}{m}, \qquad \bar{p} = \frac{r^2}{p}, \qquad \bar{q} = \frac{r^2}{q}.$$

弦 LM 和 PQ 的方向分別是 $l - m$ 和 $p - q$，由於各點互不相同，兩者皆不為零。兩個非零複數所代表的方向互相垂直，當且僅當它們的商是純虛數，所以設

$$w = \frac{l - m}{p - q}.$$

那麼 w 是純虛數當且僅當 $w + \bar{w} = 0$。現在

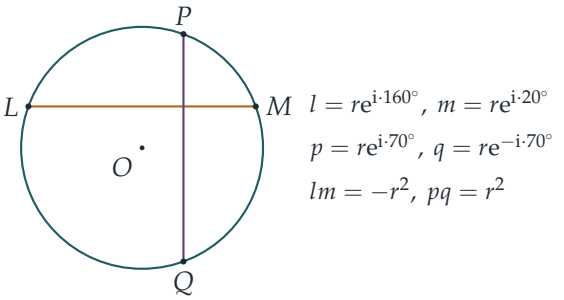
$$\bar{w} = \frac{r^2/l - r^2/m}{r^2/p - r^2/q} = \frac{(m - l)/(lm)}{(q - p)/(pq)} = \frac{l - m}{p - q} \cdot \frac{pq}{lm} = w\,\frac{pq}{lm},$$

所以

$$w + \bar{w} = w\left(1 + \frac{pq}{lm}\right) = \frac{w}{lm}\,(lm + pq).$$

由於 $w \neq 0$ 且 $lm \neq 0$，上式等於零當且僅當 $lm + pq = 0$。所以 $LM \perp PQ$ 當且僅當 $lm + pq = 0$，這正是所要證明的。

（用垂直平分線（perpendicular bisector）的做法，其實是同一個想法換上幾何的外衣：弦 LM 的垂直平分線通過 O，而弦的方向是該平分線方向的 i 倍。）



三個點

以 a_1, a_2, a_3 表示 A_1, A_2, A_3，並以 z 表示 A_1'。根據上述準則，「$A_1'A_2' \perp A_1A_2$」即是 $z\,a_2' = -a_1a_2$，所以

$$a_2' = -\frac{a_1a_2}{z}.$$

這個點確實在 S 上，因為 $|a_2'| = r \cdot r/r = r$；而且它是 S 上唯一符合要求的點。同理

$$a_3' = -\frac{a_2a_3}{a_2'} = \frac{a_3}{a_1}\,z,$$

$$a_1'' = -\frac{a_3a_1}{a_3'} = -\frac{a_1^2}{z}.$$

因此 $A_1'' = A_1'$ 當且僅當 $z = -a_1^2/z$，即

$$z^2 = -a_1^2 \iff z = \pm \mathrm{i}\, a_1.$$

這兩個值的模（modulus）都是 r，所以都在 S 上；又因為 $a_1 \neq 0$，它們並不相同。所以 A_1' 恰好有兩個位置：就是把 A_1 繞 O 旋轉 $\pm 90^\circ$ 所得的兩點。

想一想 映射 $z \mapsto -a_1^2/z$ 對這個圓做了甚麼？

在 S 上有 $1/z = \bar{z}/r^2$，所以 $-a_1^2/z = -(a_1^2/r^2)\,\bar{z}$，這是先取共軛、再作旋轉（rotation）：也就是把圓沿一條直徑作反射（reflection）。反射恰好只固定鏡線的兩個端點，這就是為何有兩個解。事實上，每一步 $z \mapsto -a_ka_{k+1}/z$ 都是這樣的反射，而這一點解釋了下文的一切。

四個點

繼續同樣的追蹤，只是最後一步改用 a_4：

$$a_2' = -\frac{a_1 a_2}{z}, \qquad a_3' = \frac{a_3}{a_1}\,z,$$
$$a_4' = -\frac{a_3 a_4}{a_3'} = -\frac{a_1 a_4}{z}, \qquad a_1'' = -\frac{a_4 a_1}{a_4'} = z.$$

所以無論 A_1' 取 S 上哪一點，都有 $A_1'' = A_1'$。

n 個點

對 k 用歸納法（induction），這樣追蹤下去可得

$$a_k' = \frac{a_k}{a_1}\,z \quad (k \text{ 為奇數}), \qquad a_k' = -\frac{a_1 a_k}{z} \quad (k \text{ 為偶數}),$$

因為若 a_k' 具有其中一種形式，則 $a_{k+1}' = -a_k a_{k+1}/a_k'$ 便具有另一種形式。最後一步是 $a_1'' = -a_n a_1 / a_n'$：

- 若 n 是偶數，$a_1'' = -a_n a_1 \cdot \dfrac{z}{-a_1 a_n} = z$，所以對每一個 A_1'，A_1'' 都與 A_1' 重合；
- 若 n 是奇數，$a_1'' = -a_n a_1 \cdot \dfrac{a_1}{a_n z} = -\dfrac{a_1^2}{z}$，所以與 $n = 3$ 的情況完全一樣，A_1'' 與 A_1' 重合的情況恰好只有 A_1' 的兩個位置，即 $z = \pm \mathrm{i} a_1$。

用文字來說：偶數次反射合成一個旋轉，而在這裏它原來就是恆等映射（identity）；奇數次反射則合成一個反射，它在圓上有兩個不動點（fixed point）。

驗算

- 圖中的例子：取 $l = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 160^\circ}$、$m = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 20^\circ}$ 時，弦 LM 是水平的；取 $p = r\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\cdot 70^\circ}$ 時，弦 PQ 是垂直的；而確實有 $lm = r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -r^2 = -pq$。
- 數值驗證：在半徑隨機的圓上隨機取點，並讓 n 由 3 取到 9，沿着垂直的弦逐步追蹤，每一步所得的點都落回 S 上；當 n 是偶數時，最後準確地回到起點；當 n 是奇數時，沿圓周掃描 200 000 個起始位置，恰好找到兩個不動點，位於 $\pm \mathrm{i} a_1$。

常見錯誤

- 以「w 是實數」來檢驗垂直。平行的弦給出實數比；垂直的弦給出的是純虛數比。
- 忘記 $\bar{z} = r^2/z$ 需要 $|z| = r$；正是因為四個點全都在以 O 為圓心的同一個圓上，這個準則才會如此簡潔。

► 在 n 個點的情況中，忘記答案取決於 n 的奇偶性（parity）。

STEP 之外

把映射 $z \mapsto c/z$ 限制在圓上，所得的就是反射，而反射的複合正是研究等距變換羣（isometry group）的起點：圓的對稱構成正交羣（orthogonal group）$O(2)$，當中兩個反射複合起來就是一個旋轉。像 $z \mapsto c/z$ 和 $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ 這樣的映射稱為莫比烏斯變換（Möbius transformations），是複分析（complex analysis）和幾何的核心。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把這兩種觀點都闡述得十分精彩。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。