詳細解答

STEP II 1990，第 4 題

純數學 • 直線排佈與數學歸納法

> **STEP II 1990，第 4 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q4

本題在 *Beyond STEP* 第 9.1 節 直線分割平面中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch09/lazy-caterer.html

關鍵思路

逐條直線地看這幅圖。每加入一條新直線，它與每條舊直線都恰好相交一次，而且交點各不相同，所以它被切成的段數是可以預知的。每一段都有兩個作用：它本身是一條新的線段，同時又把一個原有的區域一分為二。數清楚加入一條新直線所帶來的變化，便得到遞推關係（recurrence），而這些遞推關係很容易求和。

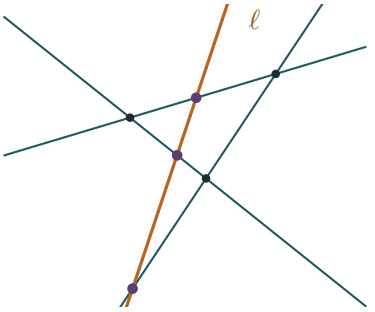
解答

小的情況

在下文中，「線段」（segment）是指某條直線上相鄰兩個交點之間的一段，包括每條直線兩端的兩段無限長部分（射線，ray）；只有一條直線時，整條直線算作一條線段。畫出最初幾種情況，可得：

n	1	2	3	4
線段	1	4	9	16
區域	2	4	7	11

例如，三條直線圍成一個三角形：每條直線被切成一條有限的邊和兩條射線，共得 9 條線段；而區域則有三角形本身、三個與它的邊相接的區域，以及三個與它的頂點相接的區域，合共 7 個。線段的數目令人猜想答案是 n^2。



圖中有三條直線（藍綠色）和第四條直線 ℓ（琥珀色）。ℓ 與舊直線相交於三個紫紅色的點，這三點把它切成四段，每一段各把七個舊區域的其中一個分成兩個，於是得到 11 個區域。

線段的數目

固定 n 條直線中的一條。由於沒有兩條直線平行（parallel），它與其餘 $n-1$ 條直線各相交一次；又由於沒有三條直線共點（concurrent），這 $n-1$ 個交點各不相同（假如有兩個交點重合，便會有三條直線在該處相交）。所以這條直線上有 $n-1$ 個不同的點，把它切成 n 段：$n-2$ 條有限線段和 2 條射線。對 n 條直線逐一這樣做，可得

$$\text{線段的數目} = n \cdot n = n^2.$$

每條線段只被數了一次，因為每條線段都恰好位於一條直線上。

如果你喜歡用歸納法（induction），可設 $S(n)$ 為線段的數目。在 $n-1$ 條處於一般位置（general position）的直線上加入第 n 條直線，新直線被切成 n 段，而它所穿過的 $n-1$ 條舊直線，每條都有一條線段被分成兩條，即每條各多出一條線段。所以

$$S(n) = S(n-1) + n + (n-1) = S(n-1) + 2n - 1,$$

而 $S(1) = 1$，若 $S(n-1) = (n-1)^2$，則 $S(n) = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$。

區域的數目

設 $R(n)$ 為 n 條處於一般位置的直線所分成的區域數目，所以 $R(1) = 2$。從 $n-1$ 條這樣的直線出發，加入第 n 條直線 ℓ。如上所述，ℓ 與舊直線相交於 $n-1$ 個不同的點，並被切成 n 段。

取其中一段。它的內部不與任何舊直線相交，所以它位於單一個舊區域之內，並且由邊界到邊界（或一直伸延至無窮遠）橫貫該區域。因此它把該區域分成兩個。

想一想 這 n 段之中，會否有兩段位於同一個舊區域內，以致新增的區域少於 n 個？

不會。每個區域都是若干個半平面（half-plane）的交集（即位於每條舊直線的某一固定側），所以它是凸（convex）的。一條直線與一個凸集的交集是單一個區間，所以 ℓ 最多只穿過每個舊區域一次，不同的段位於不同的區域。此外，ℓ 沒有經過的區域則完全不受影響。

所以加入 ℓ 恰好把 n 個舊區域一分為二，其餘的保持不變：

$$R(n) = R(n-1) + n.$$

現在使用歸納法。當 $n = 1$ 時，公式 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 給出 2，這是正確的。若 $R(n-1) = \frac{1}{2}\big((n-1)^2+(n-1)+2\big) = \frac{1}{2}(n^2-n+2)$，則

$$R(n) = \tfrac{1}{2}(n^2-n+2) + n = \tfrac{1}{2}(n^2+n+2),$$

所以公式對所有 $n \geq 1$ 成立，證明完畢。（等價地，$R(n) = 1 + (1+2+\cdots+n) = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$，其中開首的 1 是沒有任何直線時的整個平面。）

驗算

- 當 $n = 1, 2, 3, 4$ 時，公式給出 $2, 4, 7, 11$，與所畫的圖吻合。
- 歐拉公式（Euler's formula）提供了一個獨立的驗算方法。把所有無限長的射線在單一個「無窮遠點」（point at infinity）處連接起來。這樣便有 $V = \binom{n}{2} + 1$ 個頂點、$E = n^2$ 條邊和 F 個面，且 $V - E + F = 2$，所以 $F = n^2 - \binom{n}{2} + 1 = \frac{1}{2}(n^2+n+2)$。
- 我們用電腦隨機畫出最多 8 條係數為整數的直線，透過找出交點的位置來數線段，並在每個交點附近及遠處選取樣本點，以這些樣本點「位於每條直線哪一側」的不同組合數目作為區域的數目。例如，8 條直線每次都得出 64 條線段和 37 個區域。

常見錯誤

- 忘記每條直線上的兩條無限長射線，結果得出 $n(n-2)$ 而不是 n^2。
- 說新直線增加 $n-1$ 個區域（每個交點一個），而不是 n 個（每段一個）。
- 沒有用上題設條件：若沒有「無三線共點」這個條件，一條直線上的交點便不一定各不相同，數目亦會減少。

STEP 之外

這是*超平面排列*（hyperplane arrangement）最簡單的情況。把同樣的論證提高一個維度，可證明 n 個處於一般位置的平面把空間切成 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 塊，因為每個新平面本身都被舊平面切成 $R(n-1)$ 個區域。用歐拉公式所作的驗算，讓我們初次窺見歐拉示性數（Euler characteristic），它是拓撲學（topology）的一個核心概念。若想讀一章講述歐拉公式及其應用的精彩文字，可參閱 Aigner 與 Ziegler 的 *Proofs from THE BOOK*（《數學天書中的證明》）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。