詳細解答

STEP II 1990，第 3 題

純數學 • 三次曲線的描繪

> **STEP II 1990，第 3 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q3

關鍵思路

把這個三次式（cubic）寫成 $f(x) = x(x^2 - 2bx + c^2)$。兩個判別式（discriminant）決定了一切：$f'(x)$ 的判別式告訴我們曲線有沒有轉向點（turning point），而二次因式的判別式則告訴我們曲線除了原點之外，還會不會在別處與 x 軸相交。題目的七種情況，不過是 b 相對於兩個臨界值 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ 和 c 的各種位置。三次曲線一旦畫好，$y^2 = f(x)$ 幾乎是順手可得：只保留 $f(x) \geq 0$ 的部分，取平方根，再對 x 軸作反射。

解答

各種情況都成立的事實

設 $f(x) = x^3 - 2bx^2 + c^2x = x(x^2 - 2bx + c^2)$。則

$$f'(x) = 3x^2 - 4bx + c^2, \qquad f''(x) = 6x - 4b.$$

- 轉向點。f' 的判別式是 $16b^2 - 12c^2 = 4(4b^2 - 3c^2)$。所以若 $2b > c\sqrt{3}$，f' 有兩個相異實零點；若 $2b = c\sqrt{3}$，有一個重零點；若 $2b < c\sqrt{3}$，則沒有零點。有零點時，它們的和是 $\frac{4}{3}b \geq 0$，積是 $\frac{1}{3}c^2 \geq 0$，所以兩個都不是負數：所有轉向點都位於 $x \geq 0$ 的範圍內。
- 根。$f(0) = 0$ 恆成立。二次因式是 $(x - b)^2 + c^2 - b^2$，所以若 $b < c$，它沒有實零點；若 $b = c$，有二重零點 $x = b$；若 $b > c$，則有兩個零點 $b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$。
- 負的 x。當 $x < 0$ 時，x^3、$-2bx^2$ 和 c^2x 每一項都 ≤ 0，而且 $x^3 < 0$，所以 $f(x) < 0$。曲線在 y 軸左邊的部分全部位於 x 軸下方。
- 形狀。當 $x \to \pm\infty$ 時 $f(x) \to \pm\infty$；曲線在原點的斜率（gradient）是 $f'(0) = c^2$；唯

一的拐點（point of inflection）在 $x = \frac{2}{3}b$，f'' 在該處變號。

由於只要 $c > 0$ 就有 $c\sqrt{3} < 2c$，所以對固定的 c，各種情況是按 b 由小至大的次序排列的：先是沒有轉向點，然後是駐拐點，再然後是轉向點都在橫軸上方，接着是曲線在一個根處與橫軸相切，最後是三個根。

三次曲線

(i) $2b < c\sqrt{3}$。這時對所有 x 都有 $f'(x) > 0$（它的判別式是負數，首項係數是正數），所以 f 嚴格遞增。此外 $b < \frac{\sqrt{3}}{2}c < c$（注意這裏 $c > 0$），所以原點是唯一的根。曲線以斜率 c^2 上升穿過原點，並在 $x = \frac{2}{3}b$ 處有一個拐點。

(ii) $2b = c\sqrt{3} \neq 0$。這時 $f'(x) = 3(x - \frac{2}{3}b)^2 \geq 0$，所以 f 仍然遞增，但在 $x = \frac{2}{3}b = c/\sqrt{3}$ 處有一瞬間是水平的。這也正是 $f'' = 0$ 的地方，所以它是一個駐拐點（stationary point of inflection）。利用 $c^2 = \frac{4}{3}b^2$，

$$f\left(\tfrac{2}{3}b\right) = \tfrac{2}{3}b\left(\tfrac{4}{9}b^2 - \tfrac{4}{3}b^2 + \tfrac{4}{3}b^2\right) = \tfrac{8}{27}b^3 = \tfrac{\sqrt{3}}{9}c^3 > 0.$$

同樣有 $b < c$，所以原點是唯一的根。

(iii) $c\sqrt{3} < 2b < 2c$。這時 f' 有兩個零點 $x_1 < x_2$，兩個都是正數，於是在 $x_1 = \frac{1}{3}\left(2b - \sqrt{4b^2 - 3c^2}\right)$ 處有極大點（maximum），在 $x_2 = \frac{1}{3}\left(2b + \sqrt{4b^2 - 3c^2}\right)$ 處有極小點（minimum）。

? **想一想** 極小點會不會跌到 x 軸下方？

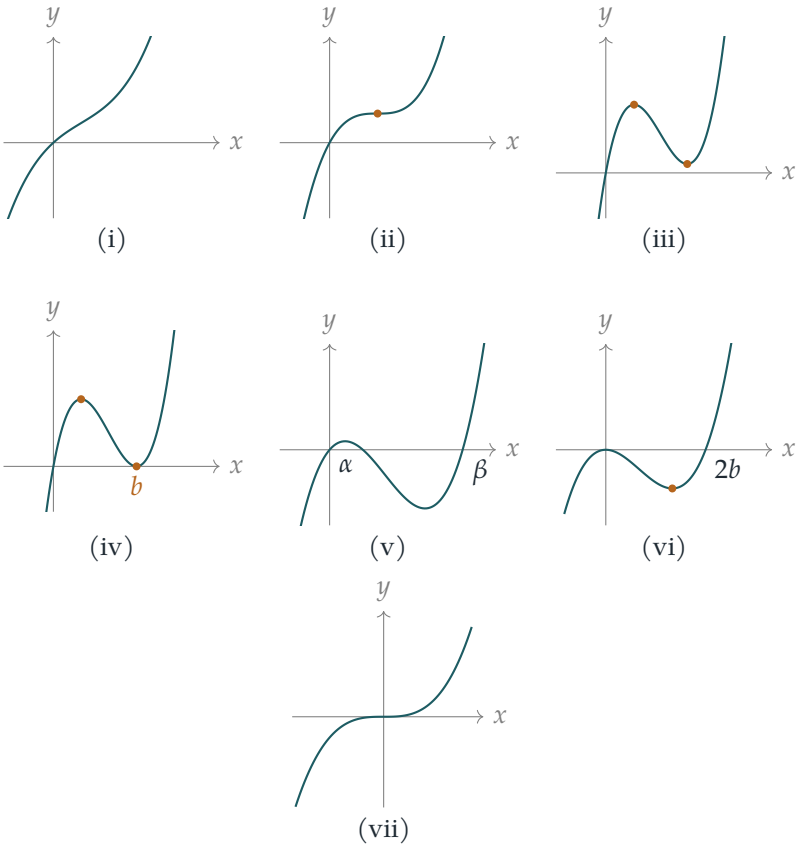
不會。由於 $b < c$，因式 $(x - b)^2 + c^2 - b^2$ 對每一個 x 都是正數，所以對所有 $x > 0$ 都有 $f(x) > 0$。因此兩個轉向點都在橫軸上方，曲線仍然只在原點穿過橫軸。它先上升，稍微回落，然後一直上升。

(iv) $b = c \neq 0$。這時 $f(x) = x(x - b)^2$。$x = b$ 是二重根，表示曲線在該處與橫軸相切；這就是極小點 $(b, 0)$。$f'(x) = (x - b)(3x - b)$ 的另一個零點給出極大點 $\left(\frac{1}{3}b, \frac{4}{27}b^3\right)$。

(v) $b > c > 0$。這時有三個根 $0 < \alpha < \beta$，其中 $\alpha = b - \sqrt{b^2 - c^2}$，$\beta = b + \sqrt{b^2 - c^2}$（因為 $\sqrt{b^2 - c^2} < b$，所以兩個都是正數）。在相鄰兩個根之間曲線必定要轉向，所以極大點在 $(0, \alpha)$ 內，該區間上 $f > 0$；極小點在 (α, β) 內，該區間上 $f < 0$。所以 $f \geq 0$ 恰好在 $[0, \alpha]$ 和 $[\beta, \infty)$ 上成立。

(vi) $c = 0, b \neq 0$。這時 $f(x) = x^2(x - 2b)$，$f'(x) = x(3x - 4b)$。原點是二重根，所以它是極大點，曲線在該處與橫軸相切；另外在 $\left(\frac{4}{3}b, -\frac{32}{27}b^3\right)$ 處有極小點。曲線在 $x = 2b$ 處穿過橫軸。

(vii) $b = c = 0$。這就是 $y = x^3$，在原點有一個駐拐點。



這些草圖取 $c = 1$，在 (i)–(iv) 中 $b = \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0.99, 1$，在 (v) 中 $(b, c) = (1, 0.8)$，在 (vi) 中 $b = 0.6$。各小圖的縱向比例並不相同，好讓 (iii) 和 (iv) 中細小的起伏能夠看得見。

曲線 $y^2 = f(x)$

以下三條法則可把每條三次曲線變成曲線 $y^2 = f(x)$：

- 在 $f(x) < 0$ 的地方沒有點，尤其是 $x < 0$ 的地方沒有點；
- 在 $f(x) \geq 0$ 的地方，$y = \pm\sqrt{f(x)}$，所以曲線對 x 軸對稱，並且在 f 最大的地方最高；
- 求導可得 $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$。

想一想 曲線與 x 軸相交的地方是甚麼樣子的？

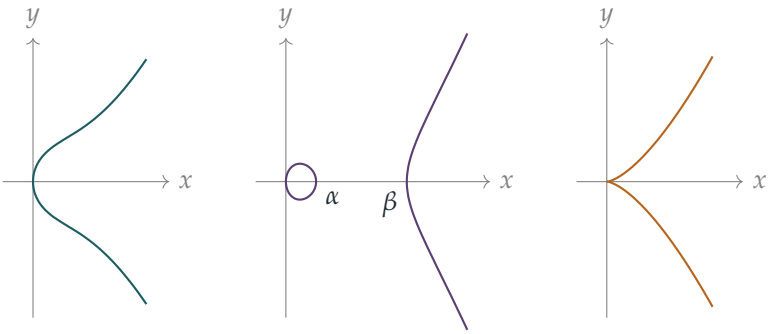
在 f 的單根（simple root）x_0 處，我們有 $f'(x_0) \neq 0$，而當 $y \to 0$ 時 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{2y}{f'(x)} \to 0$。所以該處的切線（tangent）是垂直的，上下兩半平滑地接合。在這樣的根附近 $y^2 \approx$

$f'(x_0)(x - x_0)$，那是一條橫放的拋物線。重根（repeated root）的表現則有所不同，情況 (vii) 就是例子。

情況 (i)。$f(x) \geq 0$ 恰好當 $x \geq 0$ 時成立，而 0 是單根（$f'(0) = c^2 > 0$）。所以曲線是單獨一條無界的分支。它以垂直切線離開原點，在該處看來像 $y^2 \approx c^2 x$；由於 f 遞增，$|y| = \sqrt{f(x)}$ 穩步增加，最終增長得像 $x^{3/2}$。上半部分起初是凹（concave）的，像 $\sqrt{x}$，最後變成凸（convex）的，像 $x^{3/2}$，所以它有一個拐點（由對稱性，下半部分也有）。

情況 (v)。$f(x) \geq 0$ 在 $[0, \alpha]$ 和 $[\beta, \infty)$ 上成立，而三個根都是單根。所以曲線分成互不相連的兩部分：一個封閉的卵形線，經過 $(0,0)$ 和 $(\alpha, 0)$，在這兩點的切線都是垂直的，並且在三次曲線極大點的 x 坐標處最寬（就 y 方向而言）；以及一條無界的分支，從 $(\beta, 0)$ 以垂直切線出發，像情況 (i) 的曲線那樣向右張開。在三次曲線取負值的空隙 $\alpha < x < \beta$ 中，甚麼都沒有。

情況 (vii)。$y^2 = x^3$，所以 $x \geq 0$ 且 $y = \pm x^{3/2}$。這裏當 $x \to 0$ 時 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \pm\frac{3}{2}x^{1/2} \to 0$：兩半分別從上方和下方到達原點，並且都與 x 軸相切，形成一個尖角，稱為尖點（cusp）。



(i)　(v)　(vii)

這些圖所用的 b 和 c 的值與相應的三次曲線相同，兩軸的比例相等。

驗算

- 把 $b = c = 0$ 代入任何一個一般性的結論，結果都應該與 (vii) 吻合；例如 (ii) 中的駐點值 $\frac{8}{27}b^3$ 和 (vi) 中的極小值 $-\frac{32}{27}b^3$ 都收縮到原點。
- 取 $c = 1$ 和 $b = 0.99$（情況 (iii)），轉向點大約在 $(0.340, 0.150)$ 和 $(0.980, 0.020)$，正如所說，兩個都在橫軸上方。取 $(b, c) = (1, 0.8)$，根是 0、0.4、1.6，極小值約為 -0.388，在 $x \approx 1.147$ 處取得，位於 $(0.4, 1.6)$ 之內。
- 就情況 (i)、(iii) 和 (v) 隨機選取數千組 (b, c) 作數值測試，結果確認了轉向點和根的數目與位置，以及 $f \geq 0$ 成立的集合。

常見錯誤

- 把情況 (iii) 的極小點畫在橫軸下方：當 $b < c$ 時，三次曲線對所有 $x > 0$ 都取正值。
- 畫 $y^2 = f(x)$ 時，在它於單根處穿過 x 軸的地方畫成一個角，或者畫成水平切線。該處的切線是垂直的。
- 忘記了 $y^2 = f(x)$ 在三次曲線取負值的地方沒有點，所以在情況 (v) 中，卵形線與分支是不相連的。

STEP 之外

若曲線 $y^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ 中的三次式有相異的根，這條曲線就是橢圓曲線（elliptic curve），是現代數論的核心對象之一。情況 (v) 有三個實根，給出一個卵形線加一條分支的兩部分圖形；情況 (i) 只有一個實根，給出單獨一部分。當有根重合時，曲線就變成奇異（singular）的：情況 (vii) 有一個尖點，而情況 (iv) 則會給出一條在 $(b, 0)$ 處自相交的曲線。這類曲線上的點竟然可以用一種奇妙的方式「相加」，想初步了解，可參閱 Silverman 與 Tate 的 *Rational Points on Elliptic Curves*（橢圓曲線上的有理點）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。