詳細解答

STEP II 1990，第 2 題

純數學 • 托勒密定理

> **STEP II 1990，第 2 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q2

關鍵思路

第一部分是一條三角恆等式（trigonometric identity），只要把每個正弦之積都化成餘弦之差，它便迎刃而解；然後利用條件 $A+B+C+D=\pi$ 改寫 $\cos(A+C)$ 和 $\cos(A-C)$。第二部分是托勒密定理（Ptolemy's theorem）。圓心 O 就是提示：半徑為 r 的圓上每條弦（chord）的長度都是 $2r\sin$(所對角的一半，而該角的頂點為O)，而圍繞 O 的四個半角之和為 π，這正是第一部分的條件。

解答

恆等式

我們三次使用積化和差公式（product-to-sum formula）

$$\sin X\sin Y=\tfrac{1}{2}[\cos(X-Y)-\cos(X+Y)]$$

。在左方，

$$\sin(A+B)\sin(A+D)=\tfrac{1}{2}[\cos(B-D)-\cos(2A+B+D)],$$
$$\sin B\sin D=\tfrac{1}{2}[\cos(B-D)-\cos(B+D)],$$

所以 $\cos(B-D)$ 兩項互相抵消，得

$$\sin(A+B)\sin(A+D)-\sin B\sin D=\tfrac{1}{2}[\cos(B+D)-\cos(2A+B+D)].$$

在右方，

$$\sin A\sin C=\tfrac{1}{2}[\cos(A-C)-\cos(A+C)].$$

現在利用 $C = \pi - A - B - D$。由此可得

$$A + C = \pi - (B + D), \qquad \text{所以} \quad \cos(A + C) = -\cos(B + D),$$
$$A - C = (2A + B + D) - \pi, \qquad \text{所以} \quad \cos(A - C) = -\cos(2A + B + D),$$

當中用到 $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ 和 $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$。因此

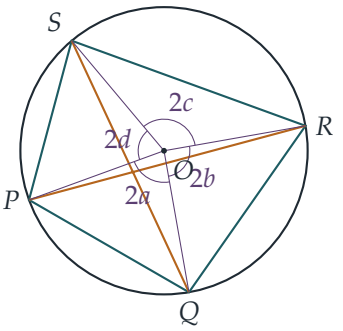
$$\sin A \sin C = \tfrac{1}{2}[-\cos(2A + B + D) + \cos(B + D)],$$

這與左方相同。恆等式得證。

圓

設圓的半徑為 r。沿圓周由 P 到 Q 到 R 到 S 再回到 P，設弧（arc）PQ、QR、RS、SP 在 O 所對的角分別為 $2a$、$2b$、$2c$、$2d$。由於各點按此次序排列，這四段弧互不重疊，並合成整個圓，所以

$$a, b, c, d > 0, \qquad 2a + 2b + 2c + 2d = 2\pi, \qquad \text{即} \quad a + b + c + d = \pi.$$



? **想一想** 若一條弦所對的弧在圓心所對的角為 2θ，這條弦有多長？

若 $0 < 2\theta \leq \pi$，由 O 和弦的兩個端點組成的三角形是等腰（isosceles）三角形，兩腰長 r，頂角為 2θ。由 O 所作的垂線同時平分弦和頂角，所以弦長為 $2r\sin\theta$。若 $\pi < 2\theta < 2\pi$，則三角形內位於 O 的角為 $2\pi - 2\theta$，弦長為 $2r\sin(\pi - \theta) = 2r\sin\theta$。所以在任何情況下

$$\text{弦長} = 2r\sin\theta.$$

把這個結果應用於四條邊，以及兩條對角線（diagonal）（弧 $P \to Q \to R$ 所對的角為 $2(a + b)$，弧 $Q \to R \to S$ 所對的角為 $2(b + c)$），便得

$$PQ = 2r\sin a, \quad QR = 2r\sin b, \quad RS = 2r\sin c, \quad PS = 2r\sin d,$$

$$PR = 2r\sin(a + b), \qquad QS = 2r\sin(b + c).$$

注意 $a+b$ 或 $b+c$ 可能大於 $\frac{\pi}{2}$；這就是我們需要為大於半圓的弧驗證該公式的原因。

除以 $4r^2$ 之後，要證明的結果變成

$$\sin a \sin c + \sin b \sin d = \sin(a+b)\sin(b+c),$$

或等價地，

$$\sin(b+a)\sin(b+c) - \sin a \sin c = \sin b \sin d.$$

這正是第一部分的恆等式，其中 $A=b$、$B=a$、$D=c$ 及 $C=d$；這樣代入是容許的，因為 $b+a+d+c=\pi$。再乘回 $4r^2$，得

$$PQ \times RS + QR \times PS = PR \times QS,$$

這就是所要證明的結果。

驗算

- 內接於半徑為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的圓的正方形，邊長為 1，對角線長 $\sqrt{2}$：$1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$。
- 對任何邊長為 p 和 q 的長方形，托勒密定理變成 $p^2+q^2 =$ (對角線)^2：畢氏定理（Pythagoras's theorem）是它的特殊情況。對於 3×4 的長方形，$9+16=25=5\times 5$。
- 以 10^5 組隨機的 A, B, D 值（其中 $C=\pi-A-B-D$）對恆等式作數值檢驗，最大誤差約為 5×10^{-15}；另外 10^5 個隨機的圓內接四邊形（cyclic quadrilateral）均滿足最後的結果，相對誤差在 10^{-15} 以內。若各點的次序被打亂（例如沿圓周依次為 P, R, Q, S），等式便不成立，可見次序確實重要。

常見錯誤

- 使用以圓上某點為頂點的圓周角（inscribed angle），卻沒有說明它們對着哪一段弧。按題目的提示改用圓心角，便可避免這個問題。
- 忘記對角線所截的弧可以大於半圓；公式 $2r\sin\theta$ 依然成立，但需要上文那一行的理由來支持。
- 把錯誤的角配對到 A, B, C, D：A 和 C 必須是只在右方出現的兩個角，在這裏即 b 和 d。

STEP 之外

托勒密定理有一個影響深遠的推廣：對平面上任意四點，$PQ \cdot RS + QR \cdot PS \geq PR \cdot QS$，而等號成立當且僅當這些點依次位於同一個圓（或同一條直線）上。有一個巧妙的證明：把各點視為複數（complex numbers）p, q, r, s，留意代數恆等式 $(p-q)(r-s) + (q-r)(p-s) = (p-r)(q-s)$，再應用三角不等式（triangle inequality）；等號成立的情況，正是複平面的幾何派上用場之處。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《複分析：可視化方法》）是欣賞這類論證的絕佳讀物，書中也介紹了反演（inversion），而反演同樣能簡潔地證明這個結果。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。