詳細解答

STEP II 1990，第 16 題

概率與統計 • 貝葉斯定理

> **STEP II 1990，第 16 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q16

關鍵思路

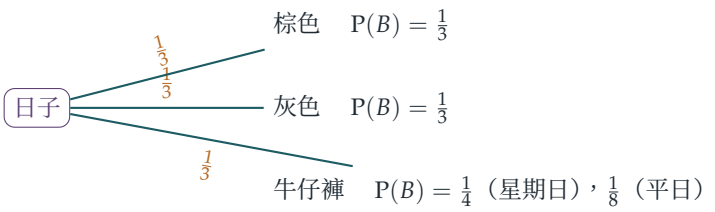
這其實是喬裝了的貝葉斯定理（Bayes' theorem）。照片告訴我們當天繫的是黑色領帶，而我們要求的是已知這一點時，那天是某一天的概率。所以我們先順着推：對每一類日子，用一幅按褲子分支的樹形圖（tree diagram），求出繫黑色領帶的概率。然後再把條件概率（conditional probability）倒轉過來。星期一的規則只改動樹形圖的其中一條分支，所以第二部分幾乎不用多花工夫。

解答

設 S 為照片攝於星期日的事件，B 為我繫着黑色領帶的事件。照片出自七天中任何一天的可能性均等，所以在看照片之前，$\mathrm{P}(S) = \frac{1}{7}$。除了（稍後的）星期一之外，每一天穿每條褲子的概率都是 $\frac{1}{3}$。

各類日子繫黑色領帶的機會

- **棕色褲子**。領巾已被排除，所以領帶是從黑色、波點和軍團領帶三者中隨機選出：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$。
- **灰色褲子**。波點領帶已被排除，所以是從黑色領帶、軍團領帶和領巾中選：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$。
- **星期日穿牛仔褲**。一定會繫領帶，從全部四條中選：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}$。
- **平日穿牛仔褲**。有 $\frac{1}{2}$ 的概率穿運動衫而不繫領帶。否則就是四條領帶的其中一條：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$。



沿各分支相加（即按褲子劃分的全概率公式（law of total probability）），

$$\mathrm{P}(B \mid \text{星期日}) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{11}{12} = \tfrac{11}{36} = \tfrac{22}{72},$$
$$\mathrm{P}(B \mid \text{平日}) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{19}{24} = \tfrac{19}{72}.$$

第一個答案

根據貝葉斯定理，星期日的先驗概率（prior）為 $\frac{1}{7}$，六個平日合計為 $\frac{6}{7}$，

$$\mathrm{P}(S \mid B) = \frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{22}{72}}{\frac{1}{7}\cdot\frac{22}{72}+\frac{6}{7}\cdot\frac{19}{72}} = \frac{22}{22+6\times 19} = \frac{22}{136} = \frac{11}{68},$$

正如所求。（公因數 $\frac{1}{7\times 72}$ 會約去，這就是為甚麼值得把所有分數都通分成以 72 為分母。）

> **想一想** 為甚麼答案不直接是 $\mathrm{P}(B \mid \text{星期日})$，或者 $\frac{1}{7}$？

$\mathrm{P}(B \mid \text{星期日}) = \frac{11}{36}$ 答的是另一條問題：它是已知日子時繫這條領帶的機會，而不是已知領帶時那天是星期日的機會。而 $\frac{1}{7}$ 則忽略了證據。星期日繫黑色領帶的可能性稍高一點（$\frac{22}{72}$ 對 $\frac{19}{72}$），因為那天沒有不繫領帶這個選擇，所以這張照片把星期日的概率由 $\frac{1}{7} = \frac{11}{77}$ 輕輕推高至 $\frac{11}{68}$。

加入星期一的規則

現在星期一必定穿牛仔褲，而星期一仍然是平日，所以運動衫這個選擇依然適用：

$$\mathrm{P}(B \mid \text{星期一}) = 1\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} = \tfrac{9}{72}.$$

星期日和其餘五個平日不變。每一天的先驗概率仍然是 $\frac{1}{7}$，可以約去，所以

$$\mathrm{P}(S \mid B) = \frac{\frac{22}{72}}{\frac{22}{72}+\frac{9}{72}+5\cdot\frac{19}{72}} = \frac{22}{22+9+95} = \frac{22}{126} = \frac{11}{63}.$$

這比 $\frac{11}{68}$ 稍大一點。這是合理的：星期一繫黑色領帶的可能性降低了（由 $\frac{19}{72}$ 變成 $\frac{1}{8}$），所以一張繫黑色領帶的照片會令星期一的可能性下降，而稍為更傾向星期日。

驗算

- 每一天各條領帶的概率，連同「不繫領帶」，加起來等於 1。例如，平日不繫領帶的機會是 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$。
- 模擬 4×10^5 個隨機日子，得出繫黑色領帶的日子當中星期日所佔的比例約為 0.161（準確值 $\frac{11}{68} \approx 0.1618$），加入星期一的規則後則約為 0.174（準確值 $\frac{11}{63} \approx 0.1746$）。

常見錯誤

- 忘記了星期一穿牛仔褲時，仍然有一半機會穿運動衫：星期一是平日。星期一若用 $\frac{1}{4}$ 而不是 $\frac{1}{8}$，會得出 $\frac{22}{135}$。
- 穿棕色或灰色褲子時從全部四條領帶中選。這兩條褲子各自只剩下三條領帶可選。

STEP 之外

把「已知假設時證據的概率」轉化為「已知證據時假設的概率」，正是貝葉斯推斷（Bayesian inference）的核心。有一個簡潔的說法：後驗賠率（posterior odds）等於先驗賠率乘以似然比（likelihood ratio）。這裏星期日對平日的先驗賠率是 1 : 6，似然比是 22 : 19，於是得出 22 : 114，即 11 : 57。大學課程會由此發展出貝葉斯統計學（Bayesian statistics），當中整個分佈都以同樣的方式更新。Blitzstein 與 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率論入門）有一章講條件概率，寫得十分出色，並附有許多像本題這樣的例子。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。