詳細解答

STEP II 1990，第 15 題

概率與統計 • 順序統計量

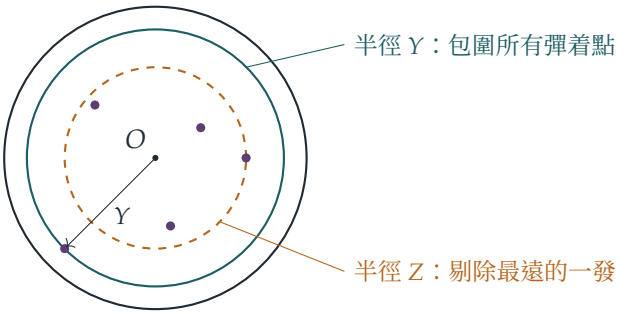
STEP II 1990，第 15 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s2-q15

關鍵思路

以 O 為圓心、能包圍一組彈着點的最小圓，其半徑等於最遠一發與圓心的距離，所以 Y 是若干個獨立（independent）距離的最大值。最大值不超過 y，當且僅當每一發都落在距離 y 之內，於是累積分佈函數（cumulative distribution function）便化為一個乘積。剔除最遠的一發之後，我們要求的半徑是第二大的距離，而它的分佈函數可以透過數算有多少發可以落在給定的圓之外而求得。



解答

設 $R_1, \ldots, R_n$ 為 n 發射擊的彈着點與 O 的距離。它們互相獨立（因為各發是獨立射出的），而且每一個的分佈函數都是

$$P(R_i \le t) = t^2, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Y 的分佈

以 O 為圓心、包含所有彈着點的最小圓，半徑為 $Y = \max(R_1, \ldots, R_n)$。對於 $0 \le y \le 1$，

$$P(Y \le y) = P(R_1 \le y, \ldots, R_n \le y) = \prod_{i=1}^{n} P(R_i \le y) = (y^2)^n = y^{2n},$$

其中中間一步用到獨立性。求導後，Y 的概率密度函數（probability density function）為

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} y^{2n} = 2ny^{2n-1}, \qquad 0 \le y \le 1,$$

正如題目所求。（它在 $[0,1]$ 之外為零，而且積分為 1，理應如此。）

圓的面積為 πY^2，所以

$$E(\pi Y^2) = \pi \int_0^1 y^2 \cdot 2ny^{2n-1}\,\mathrm{d}y = 2n\pi \int_0^1 y^{2n+1}\,\mathrm{d}y = \frac{2n\pi}{2n+2} = \frac{n\pi}{n+1}.$$

剔除最遠的一發

我們需要 $n \ge 2$，這樣才會有彈着點剩下。剔除最遠的一發之後，以 O 為圓心的最小包圍圓的半徑為 Z，即 $R_1, \ldots, R_n$ 之中第二大的一個。

> ? **想一想** 怎樣用「有多少發落在半徑為 z 的圓之外」來描述事件 $Z \le z$？

第二大的距離不超過 z，當且僅當最多只有一發與 O 的距離大於 z。每一發各自獨立地以概率 z^2 落在距離 z 之內，所以落在半徑為 z 的圓之外的發數服從二項分佈（binomial distribution），$\mathrm{B}(n, 1-z^2)$。因此，對於 $0 \le z \le 1$，

$$\begin{aligned} P(Z \le z) &= P(\text{沒有一發在圓外}) + P(\text{恰好一發在圓外}) \\ &= z^{2n} + n(1-z^2)z^{2(n-1)} \\ &= nz^{2n-2} - (n-1)z^{2n}. \end{aligned}$$

求導便得 Z 的密度函數：

$$f_Z(z) = 2n(n-1)z^{2n-3} - 2n(n-1)z^{2n-1} = 2n(n-1)z^{2n-3}(1-z^2), \qquad 0 \le z \le 1.$$

因此新圓的面積的期望值（expected value）為

$$\begin{aligned} E(\pi Z^2) &= 2n(n-1)\pi \int_0^1 \left(z^{2n-1} - z^{2n+1}\right)\mathrm{d}z \\ &= 2n(n-1)\pi \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) \\ &= 2n(n-1)\pi \cdot \frac{2}{2n(2n+2)} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)\pi, \end{aligned}$$

這正是所求的結果。

驗算

- 當 $n = 1$ 時，第一個答案是 $\pi/2$：單獨一發的 R^2 在 $[0,1]$ 上服從均勻分佈（uniform distribution）（因為 $P(R^2 \leq u) = u$），所以面積 πR^2 的期望值是 $\pi/2$。
- 當 $n = 2$ 時，第二個答案是 $\pi/3$，即兩發之中較近一發所對應的面積期望值；連同第一個答案 $2\pi/3$，兩者的平均是 $\pi/2$，即單獨一發時的值，這是必然的。
- 以 2×10^5 次試驗及 $n = 5$ 進行模擬（simulation），得到的面積期望值為 2.618 和 2.095，而理論值為 $5\pi/6 \approx 2.618$ 和 $4\pi/6 \approx 2.094$。

常見錯誤

- 寫成 $P(Z \leq z) = z^{2(n-1)}$，彷彿餘下的彈着點是一個全新的、大小為 $n-1$ 的樣本；被剔除的一發並不是隨機選出的，所以留下來的彈着點會偏向 O。
- 忘記了因子 n，它代表落在圓外的是哪一發。
- 先求 $E(Y)$ 再把它平方：面積的期望值是 $\pi E(Y^2)$，而不是 $\pi\big(E(Y)\big)^2$。

STEP 之外

這些就是順序統計量（order statistics）。由於 $U_i = R_i^2$ 在 $[0,1]$ 上服從均勻分佈，這些面積其實就是 n 個均勻隨機變量的順序統計量，而第 k 小的一個（取自 n 個獨立的均勻隨機變量）服從貝塔分佈（beta distribution），平均值為 $k/(n+1)$；本題的兩個答案分別是 $k = n$ 和 $k = n-1$ 的情況。一個簡潔的圖像是：n 個隨機點把 $[0,1]$ 分割成 $n+1$ 段期望長度相等的間隙。Grimmett 與 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率入門教科書）涵蓋了這類變換和順序統計量。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。