詳細解答

STEP II 1990，第 14 題

力學 • 彈性碰撞

STEP II 1990，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s2-q14

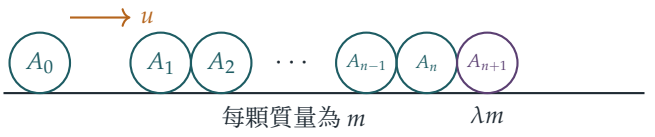
本題在 *Beyond STEP* 第 10.1 節牛頓擺中有完整的引導式講解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch10/newtons-cradle.html

關鍵思路

我們不知道衝量（impulse）怎樣沿着這列彈珠傳遞，所以無法逐次追蹤每一下碰撞。我們能做的，是用三個條件去檢驗每個提出的最終運動：動量（momentum）守恆、動能（kinetic energy）守恆，以及彈珠永遠不會互相穿過。第三個條件很容易被遺忘，但每一部分的結論正是由它決定的。若一顆彈珠的正後方緊貼着一顆靜止的彈珠，它就不能向後運動；而一顆彈珠的速度也不能比它正前方的彈珠快。

解答

我們把彈珠看成在一條光滑直線（即槽）上的質點（particle），速度以 A_0 原來的運動方向為正。碰撞之前，總動量是 mu，總動能是 $\frac{1}{2}mu^2$，兩者都守恆。



由於彈珠不能重疊，任何可能的最終運動都必須符合以下兩點。

- 若 A_k 靜止，而 A_{k+1} 在它的正前方並與它接觸，則 A_{k+1} 的速度不能是負數。
- 若 A_k 與 A_{k+1} 互相接觸，則 A_k 的速度不能大於 A_{k+1} 的速度。

第 (i) 部分

假設只有 A_n 和 A_{n+1} 運動，速度分別為 v 和 w。兩式同除以 m，得

$$v + \lambda w = u,$$
$$v^2 + \lambda w^2 = u^2.$$

把 $v = u - \lambda w$ 代入能量方程，得

$$u^2 - 2\lambda uw + \lambda^2 w^2 + \lambda w^2 = u^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda w\big((1+\lambda)w - 2u\big) = 0.$$

根 $w = 0$ 給出 $v = u$。這樣 A_n 就會向前撞進靜止的 A_{n+1}，這是不可能的。另一個根是

$$w = \frac{2u}{1+\lambda}, \qquad v = u - \lambda w = \frac{(1-\lambda)u}{1+\lambda}.$$

若 $\lambda < 1$：則 $v > 0$，所以 A_n 離開靜止的 A_{n-1}。此外

$$w - v = \frac{(1+\lambda)u}{1+\lambda} = u > 0,$$

所以 A_{n+1} 離開 A_n。兩條守恆定律都成立，而且沒有彈珠重疊，因此這個運動是可能的，其中 $A_0, \ldots, A_{n-1}$ 全部靜止。

若 $\lambda > 1$：則 $v < 0$，所以 A_n 必須向後運動。但 A_{n-1} 就在它的正後方，與它接觸而且靜止。因此，唯一同時滿足兩條守恆定律的運動在物理上並不可能，所以當 $\lambda > 1$ 時，這類運動並不存在。

第 (ii) 部分

假設只有 A_{n-1}、A_n 和 A_{n+1} 運動，速度分別為 a、b 和 c。由於 $n \geq 3$，彈珠 A_{n-2} 存在，它靜止不動，並從後面與 A_{n-1} 接觸。所以 $a \geq 0$。由於三顆運動中的彈珠不能互相超越，$a \leq b \leq c$。因此 a、b 和 c 全部非負。

> ? **想一想** 兩條守恆定律都給出關於 a、b、c 的方程。怎樣可以不解方程而比較它們？

我們把動量方程平方，再減去能量方程。由守恆得 $a + b + \lambda c = u$ 和 $a^2 + b^2 + \lambda c^2 = u^2$，所以

$$(a + b + \lambda c)^2 - (a^2 + b^2 + \lambda c^2) = u^2 - u^2 = 0.$$

展開左方，得

$$\lambda(\lambda - 1)c^2 + 2ab + 2\lambda c(a + b) = 0.$$

當 $\lambda > 1$ 且 $a, b, c \geq 0$ 時，左方每一項都非負，所以每一項都必須是零。特別地，$\lambda(\lambda - 1)c^2 = 0$，由此得 $c = 0$。於是 $0 \leq a \leq b \leq c = 0$，三顆彈珠全部靜止。由於 $u > 0$，這與動量方程矛盾。因此當 $\lambda > 1$ 時，這樣的運動並不存在。

第 (iii) 部分

(ii) 的論證適用於任何一組運動中的彈珠：若所有速度都非負，而 A_{n+1} 運動，則動能會太小。所以當 $\lambda > 1$ 時，必定有某顆彈珠向後運動。除了 A_0 之外，每顆彈珠的正後方都有另一顆彈珠，所以 A_0 自然是最有可能反彈的一顆。

想一想 我們應該試哪兩顆彈珠？

試試 A_0 和 A_{n+1}，速度分別為 p 和 q，而 $A_1, \ldots, A_n$ 保持靜止。所得的兩條方程與 (i) 中的相同，只是以 p, q 代替 v, w，而非平凡解（non-trivial solution）是

$$p = \frac{(1-\lambda)u}{1+\lambda} = -\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}, \qquad q = \frac{2u}{1+\lambda}.$$

與 (i) 一樣，動量和能量都守恆。這個運動在物理上也是可能的：

- $p < 0$，所以 A_0 向後運動，離開 A_1，而 A_0 後面沒有任何東西。
- $q > 0$，所以 A_{n+1} 離開靜止的 A_n。

所以其中一個可能的運動是：A_0 以速率 $\dfrac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$ 反彈，A_{n+1} 以速率 $\dfrac{2u}{\lambda+1}$ 向前運動，而 $A_1, \ldots, A_n$ 保持靜止。

如果我們把這次碰撞看成相鄰彈珠之間一連串獨立的碰撞，結果也是如此。每對質量相等的彈珠會交換速度，所以速率 u 一直傳遞到 A_n。當 A_n 撞上 A_{n+1} 時，它以速度 p 反彈，然後這個向後的速度再沿着這列彈珠傳回 A_0。

驗算

- 當 $\lambda = 1$ 時，所有彈珠完全相同，兩個答案都變成 A_{n+1} 以速率 u 向前運動，而其餘全部靜止，這就是大家熟悉的「牛頓擺」（Newton's cradle）。
- 取 $\lambda = 2$ 和 $u = 3$，第 (iii) 部分給出 $p = -1$ 和 $q = 2$。動量：$-1 + 2 \times 2 = 3$。能量：$1 + 2 \times 4 = 9 = 3^2$。
- 我們就 $n = 3$ 和 $n = 6$ 以數值方法逐步計算了這一連串兩兩之間的彈性碰撞（elastic collision）。當 $\lambda = 2$ 時，最終速度是 $-\frac{1}{3}u$ 和 $\frac{2}{3}u$；當 $\lambda = 4$ 時，則是 $-0.6u$ 和 $0.4u$，與預測完全相符。當 $\lambda = \frac{1}{2}$ 時，模擬結束時 A_n 和 A_{n+1} 分別以 $\frac{1}{3}u$ 和 $\frac{4}{3}u$ 運動，與 (i) 吻合。

常見錯誤

- 解了兩條守恆方程便停下來。每一部分都取決於所得的解在物理上是否可能，即取決於各速度的正負，以及彈珠會否互相穿過。
- 在 (i) 中保留 $w = 0$、$v = u$ 這個根。這個根只是描述碰撞之前的運動。
- 忘記了在 (ii) 中，正是 $n \geq 3$ 保證了 A_{n-1} 後面有一顆靜止的 A_{n-2}。

STEP 之外

對於一列互相接觸的彈珠，單憑兩條守恆定律並不能確定結果。這道題真正要問的是：在眾多滿足守恆量的解之中，哪些在物理上是可能的。要在它們之間作出選擇，就需要一個更仔細的接觸模型，例如一連串兩兩之間的碰撞，或把彈珠當作剛硬的彈簧。把彈珠當作彈簧來建立模型，就會引向質點鏈中的波動理論。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）就是以這種精神講解碰撞和守恆定律的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。