詳細解答

# STEP II 1990，第 13 題

力學 • 桿的平衡

> **STEP II 1990，第 13 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q13

## 關鍵思路

由於釘子光滑（smooth）而繩子為輕繩（light），繩上各處的張力（tension）都相同，所以桿受到兩個相等的拉力，分別沿 $PO$ 和沿 $QO$ 方向。它們的合力（resultant）平分角 $POQ$，而要達致平衡（equilibrium），這個合力必須與重量沿同一條鉛垂線互相抵銷。因此，過 $O$ 的鉛垂線就是角 $POQ$ 的角平分線，並且通過 $G$，餘下的工作交給角平分線定理（angle bisector theorem）便可。至於那個不等式，其實只是說三角形 $OPQ$ 是一個真正的三角形。

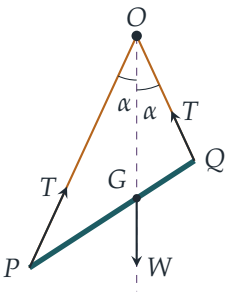
## 解答

### 求 $OP$ 和 $OQ$

把桿模型化為一枝剛性桿，其重心（centre of gravity）為 $G$，其中 $PG = a + d$ 及 $GQ = a - d$；我們取 $0 \leq d < a$，使得 $G$ 位於桿上，在中點靠 $Q$ 的一側（或正好在中點）。繩子是不可伸長（inextensible）的輕繩，釘子細小而光滑，所以 $OP$ 和 $OQ$ 兩段繩的張力 $T$ 相同，並且

$$OP + OQ = 2b.$$

作用在桿上的力只有三個：作用於 $G$ 的重量 $W$、在 $P$ 處沿 $PO$ 方向的張力 $T$，以及在 $Q$ 處沿 $QO$ 方向的張力 $T$。




兩個張力的作用線相交於 $O$，所以（對 $O$ 取力矩（moments））重量的作用線也必須通過 $O$：過 $O$ 的鉛垂線通過 $G$。此外，兩個張力的大小相等，所以它們的合力指向兩個單位向量之和的方向，這兩個單位向量一個沿 $PO$，一個沿 $QO$，而這正是兩者夾角的平分線方向。這個合力必須是鉛垂的，才能與 $W$ 平衡。因此鉛垂線 $OG$ 平分角 $POQ$；把每一半記作 $\alpha$。

**想一想** 知道 $OG$ 平分角 $POQ$，能告訴我們關於各長度的甚麼資料？

在三角形 $OPQ$ 中應用角平分線定理，由 $O$ 引出的角平分線把 $PQ$ 按鄰邊之比分割：

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{PG}{GQ} = \frac{a+d}{a-d}.$$

（直接的看法：三角形 $OPG$ 和 $OQG$ 有共同的由 $O$ 引出的高，所以它們的面積之比為 $PG : GQ$；而它們的面積又分別是 $\frac{1}{2} OP \cdot OG \sin\alpha$ 和 $\frac{1}{2} OQ \cdot OG \sin\alpha$。）所以對某個 $k > 0$，有 $OP = k(a+d)$ 及 $OQ = k(a-d)$，而由 $OP + OQ = 2b$ 得 $2ka = 2b$，故 $k = b/a$：

$$OP = \frac{b(a+d)}{a}, \qquad OQ = \frac{b(a-d)}{a}.$$

## 不等式

設 $\theta = \angle POQ = 2\alpha$。由於桿並非鉛垂，$O$ 不在直線 $PQ$ 上，所以 $OPQ$ 是一個真正的三角形，且 $0 < \theta < \pi$。以 $PQ = 2a$ 代入餘弦定理（cosine rule），得

$$\begin{aligned} 4a^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2\,OP \cdot OQ \cos\theta \\ &= \frac{b^2}{a^2}\Big[(a+d)^2 + (a-d)^2 - 2(a^2-d^2)\cos\theta\Big] \\ &= \frac{2b^2}{a^2}\Big[(a^2+d^2) - (a^2-d^2)\cos\theta\Big]. \end{aligned}$$

現在，因為 $\theta \neq 0$，所以 $\cos\theta < 1$；又因為 $d < a$，所以 $a^2 - d^2 > 0$。於是

$$4a^2 > \frac{2b^2}{a^2}\Big[(a^2+d^2) - (a^2-d^2)\Big] = \frac{4b^2d^2}{a^2},$$

亦即 $b^2d^2 < a^4$。取正平方根（其中 $b > 0$，$d \geq 0$），得 $bd < a^2$，所以

$$d < \frac{a^2}{b},$$

這正是所要證明的結果。

換一個等價的說法，這就是三角不等式（triangle inequality）$OP - OQ < PQ$：這裏 $OP - OQ = 2bd/a$，而 $2bd/a < 2a$ 正是同一個條件。（另一個不等式 $\cos\theta > -1$ 給出 $OP + OQ > PQ$，即 $b > a$，這只是說繩子的長度足以繞過釘子而已。）

## 驗算

- 若 $d = 0$（均勻桿），則 $OP = OQ = b$，桿水平懸掛，正如對稱性所要求的；不等式 $0 < a^2/b$ 自動成立。
- 當 $d \to a^2/b$ 時，$OP - OQ \to 2a = PQ$，三角形被壓扁，桿變成鉛垂：超過這個值之後，桿唯一的懸掛方式就是鉛垂懸掛。
- 取 $a = 1$，$b = 2$，$d = 0.3$：$OP = 2.6$，$OQ = 1.4$，$\cos\theta \approx 0.648$。把這個三角形擺放成 $OG$ 為鉛垂，兩個張力的水平分量互相抵銷，而對 $O$ 的力矩在機器精度之內平衡。對繩子的所有位置逐一掃描，確認了這是唯一的非鉛垂平衡位置，並且一旦 $d \geq a^2/b$ 便不存在這樣的位置。

## 常見錯誤

- 假設兩段繩的張力不同。繩子繞過光滑釘子時，兩段的張力相等，而正是這一點令 $OG$ 成為角平分線。
- 把角平分線的比例弄反了：較長的一段繩 $OP$ 連接的是離 $G$ 較遠的一端。
- 以為這個平衡是穩定的。事實上它是不穩定的：當 $d = 0$ 時，水平的桿的 $G$ 在 $\sqrt{b^2 - a^2}$ 的距離處位於 $O$ 之下，而鉛垂懸掛時則在其下方 $b$ 的距離處，位置更低。題目只問及平衡。

## STEP 之外

相對於桿而言，$O$ 的軌跡（locus）是一個以 $P$ 和 $Q$ 為焦點（foci）的橢圓，而平衡位置就是 $G$ 的高度取駐值之處。這就是虛功原理（principle of virtual work），由此可以通往拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）。它也解釋了為甚麼相等的張力會平分夾角：這正是橢圓的反射性質。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）是進一步學習靜力學和穩定性的好選擇。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。