詳細解答

STEP II 1990，第 12 題

力學 • 恢復係數與拋體

STEP II 1990，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

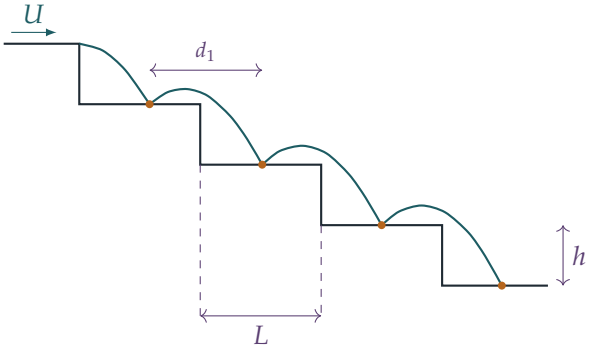
step.maths.org/questions/90-s2-q12

關鍵思路

樓梯是光滑（smooth）的，所以水平速度永遠不變：它始終是 U，而每一段水平距離都只是 U 乘以一段飛行時間。真正要花工夫的是垂直方向的運動：每次反彈令垂直速率乘以 e，而每下降 h 則令其平方增加 $2gh$。由此可得每次反彈時垂直速率的平方所滿足的一個簡單遞推關係（recurrence）。至於最後一部分，想想反彈點必須落在哪裏：在一道無窮無盡的樓梯上，每一級恰好落一次。

解答

我們把質點（particle）看成一個點，在兩次反彈之間只受重力作用；又把樓梯看成光滑的水平面，每一級比上一級低 h，相鄰梯級邊緣的水平距離為 L。



相鄰兩次反彈之間的距離

水平運動。樓梯是光滑的，所以梯級每次施加的衝量（impulse）都純粹沿垂直方向，而在兩次反彈之間唯一的力就是重力。因此水平速度任何時候都是 U，一段歷時 T 的飛行所走的水平距離為 UT。

垂直運動。設 w_n 為質點第 n 次反彈時撞上梯級的（向下）速率。質點離開最高一級時沒有垂直速度，然後下跌 h，所以

$$w_1^2 = 2gh.$$

在第 n 次反彈時，由於梯級固定不動，根據牛頓恢復定律（Newton's law of restitution），質點以速率 ew_n 向上彈起。之後它必須落在低 h 的下一級上，所以由 $v^2 = u^2 + 2as$（取向下為正，位移為 $+h$）得：

$$w_{n+1}^2 = e^2 w_n^2 + 2gh.$$

由 $w_1^2 = 2gh$ 出發，反覆應用這關係，

$$\begin{aligned} w_n^2 &= 2gh\left(1 + e^2 + e^4 + \cdots + e^{2(n-1)}\right) \\ &= 2gh\,\frac{1 - e^{2n}}{1 - e^2} = 2gh\,\alpha_n^2, \end{aligned}$$

這裏用了等比級數（geometric series）求和（因 $e^2 \neq 1$ 而成立）。所以 $w_n = \sqrt{2gh}\,\alpha_n$ 對每個 $n \geq 1$ 都成立；用歸納法（induction）簡單驗證一下便可使論證嚴謹，因為 $e^2 \cdot 2gh\,\alpha_n^2 + 2gh = 2gh\big(e^2\alpha_n^2 + 1\big)$，而 $e^2\alpha_n^2 + 1 = \dfrac{e^2 - e^{2n+2} + 1 - e^2}{1 - e^2} = \alpha_{n+1}^2$。

想一想 由第 n 次反彈到第 $(n+1)$ 次反彈，飛行時間有多長？

垂直速度以恆定的變率 g（向下）改變。它開始時是向上的 ew_n，結束時是向下的 w_{n+1}，所以總共改變了 $ew_n + w_{n+1}$，飛行時間為

$$T_n = \frac{ew_n + w_{n+1}}{g} = \frac{\sqrt{2gh}}{g}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right) = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right).$$

（這樣便不必解一條關於 T_n 的二次方程：我們早已知道末速率。）乘以水平速率 U，

$$d_n = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right),$$

正是所求。

一道很長的樓梯

由於 $0 \leq e < 1$，我們有 $e^{2n} \to 0$，所以當 $n \to \infty$ 時 $\alpha_n \to \dfrac{1}{\sqrt{1 - e^2}}$，因此

$$d_n \to D = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1 + e}{\sqrt{1 - e^2}} = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)^{\frac{1}{2}},$$

其中用了 $1-e^2=(1-e)(1+e)$。

想一想 為甚麼這個極限距離必須恰好等於 L？

由最高一級的邊緣起沿水平方向量度 x。下面第一級佔據 $0\le x\le L$，一般而言，最高一級以下的第 n 級佔據 $(n-1)L\le x\le nL$。質點在每一級上都反彈一次，所以它第 n 次反彈的位置（設為 x_n）滿足

$$(n-1)L\le x_n\le nL,\qquad \text{所以}\qquad \frac{x_n}{n}\to L\text{，當}n\to\infty.$$

另一方面，$x_n=x_1+d_1+d_2+\cdots+d_{n-1}$，而 $d_k\to D$。若 $D>L$，則由某一項起，每個 d_k 都比 L 大至少一個固定的量，於是質點每反彈一次，便相對梯級邊緣多走一段固定距離，最終會越過某一級而不落在其上；若 $D<L$，質點則逐步落後，最終會在同一級上落兩次。（嚴格來說，各項趨向 D 時，其平均值 x_n/n 亦趨向 D。）無論是哪種情況，只要樓梯夠長，質點都不會每級恰好反彈一次。所以對於很大的 N，我們需要 $D=L$：

$$U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac12}\left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac12}=L\quad\Longrightarrow\quad U=\left(\frac{L^2g}{2h}\right)^{\frac12}\left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac12},$$

正是所求。

驗算

- 特殊值。$\alpha_1=1$，所以 $d_1=U\sqrt{2h/g}\,(e+\sqrt{1+e^2})$。當 $e=0$ 時，質點每次反彈後垂直方向完全停下，所以每段飛行都只是下跌 h 的自由下落，需時 $\sqrt{2h/g}$：果然 $d_n=U\sqrt{2h/g}$，而最後的條件變成 $U\sqrt{2h/g}=L$，完全符合預期。
- 量綱。$\sqrt{2h/g}$ 是時間，所以 d_n 是長度；$\sqrt{L^2g/h}$ 是速率。
- 數值檢驗。對隨機選取的 U、h 和 e（取 $g=9.8$）以數值方法逐步模擬這運動，所得的每個 d_n 與公式相差都在 10^{-6} 以內。取 $e=\frac12$、$L=0.3$ 和 $h=0.2$，公式給出 $U\approx0.857$，而其後的反彈位置在 2000 級樓梯上都依次落在相繼的梯級上。

常見錯誤

- 把每次反彈都當成由靜止下跌 h，或由上一次反彈的高度下跌：質點每次反彈後都會上升，所以它的垂直速率會一級一級地累積起來。
- 寫成 $w_{n+1}=ew_n+\sqrt{2gh}$：相加的是速率的平方，而不是速率本身。

STEP 之外

最後一部分其實是一個關於平均值的命題：若 $d_n \to D$，則其累計平均值亦滿足 $\frac{1}{n}\sum d_k \to D$（切薩羅定理，Cesàro's theorem），這是實分析（real analysis）入門階段的一道標準習題。還要留意，關於 U 的條件是*必要*（necessary）條件，而非充分（sufficient）條件：最初幾次反彈的距離比 L 短，而若 e 接近 1，累積起來的差額可以超過起步時領先的 x_1，那麼任何發射速率都行不通。想看數列極限的嚴謹處理，可參閱 Abbott 的 *Understanding Analysis*；至於碰撞的力學，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。