詳細解答

STEP II 1990，第 11 題

力學 • 角動量守恆

> **STEP II 1990，第 11 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q11

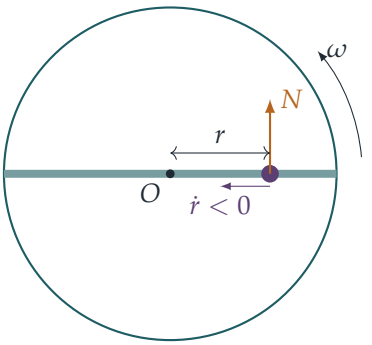
關鍵思路

圓盤與質點合起來是一個系統：對垂直軸沒有外力矩（torque），亦沒有外力作功，所以有兩個量守恆：對該軸的角動量（angular momentum）和動能（kinetic energy）。由這兩條方程可直接求得 ω 和 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$。把兩個變率相除便可消去時間，得出一條描述路徑的可分離變數方程（separable equation），即 r 作為 θ 的函數。

解答

模型

把質點視為置於光滑凹槽內的點質量，並假設轉軸光滑（軸承無摩擦）。從上方俯視，質點位於凹槽上距離 r 處，沿凹槽方向的速度為 $\dot{r}$，垂直於凹槽方向的速度為 $r\omega$，其中 $\omega = \dot{\theta}$。



質點所受的水平力只有凹槽的反作用力 N，方向垂直於凹槽（凹槽光滑，故沿凹槽方向

沒有分量）。圓盤則受到 $-N$。

角動量

重力和垂直方向的反作用力均與轉軸平行，而光滑的轉軸不施加力矩，所以對轉軸的總角動量是常數。圓盤的貢獻是 $mk^2\omega$，質點的貢獻是 $m\,r\cdot r\omega = mr^2\omega$。與 $t=0$ 時比較：

$$mk^2\omega + mr^2\omega = mk^2\Omega + ma^2\Omega \quad\Longrightarrow\quad \omega = \frac{\Omega(k^2+a^2)}{k^2+r^2}.$$

能量

> **想一想** 質點橫向移動時，反作用力 N 正好橫向推它。這樣不會改變動能嗎？

它會改變質點的動能，但不會改變總動能。N 對質點作功的功率為 $N\cdot r\omega$，而作用於圓盤上大小相等、方向相反的力，作用點同樣在距離 r 處，產生力矩 $-Nr$，故作功的功率為 $-Nr\omega$。兩者互相抵消，所以總動能守恆：

$$\tfrac{1}{2}mk^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\omega^2) = \tfrac{1}{2}mk^2\Omega^2 + \tfrac{1}{2}m(V^2 + a^2\Omega^2).$$

因此

$$\dot r^2 = V^2 + (k^2+a^2)\Omega^2 - (k^2+r^2)\omega^2.$$

利用已知條件 $V^2 = \Omega^2 a^2(k^2+a^2)/k^2$，

$$V^2 + (k^2+a^2)\Omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)\,\frac{a^2+k^2}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2}{k^2},$$

而由角動量的結果可得 $(k^2+r^2)\omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2/(k^2+r^2)$。於是

$$\dot r^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+r^2}\right) = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2\,r^2}{k^2(k^2+r^2)}.$$

質點向轉軸移動時，$\dot r < 0$，所以取負平方根（其中 $r>0$）：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k(k^2+r^2)^{1/2}},$$

這正是所求。

路徑

由於 $\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t > 0$，由鏈式法則（chain rule）得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k(k^2+r^2)^{1/2}}\cdot\frac{k^2+r^2}{\Omega(k^2+a^2)} = -\frac{r(k^2+r^2)^{1/2}}{k},$$

即 $k\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -r(k^2+r^2)^{1/2}$。留意 Ω 和 a 已經消失。

現在設 $u = 1/r$，則 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -u^{-2}\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta$，而 $r(k^2+r^2)^{1/2} = u^{-2}(1+k^2u^2)^{1/2}$（因為 $u>0$）。方程變成

$$k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{1+k^2u^2}.$$

這個平方根提示我們使用雙曲代換（hyperbolic substitution）：設 $ku = \sinh\phi$。那麼 $k\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta = \cosh\phi\,\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta$，且 $\sqrt{1+\sinh^2\phi} = \cosh\phi$，所以

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \phi = \theta + \alpha.$$

當 $\theta = 0$ 時 $r = a$，所以 $\sinh\alpha = ku = k/a$。因此 $k/r = \sinh(\theta+\alpha)$，即

$$r\sinh(\theta+\alpha) = k, \qquad \sinh\alpha = \frac{k}{a}.$$

質點永遠不會到達轉軸

> **想一想** 當 $\theta\to\infty$ 時，$r = k/\sinh(\theta+\alpha)$ 趨向 0。圓盤有可能在有限時間內轉過無限大的角度嗎？

不可能。由於 $r^2 \geq 0$，$\omega = \Omega(k^2+a^2)/(k^2+r^2) \leq \Omega(k^2+a^2)/k^2$，所以到時間 t 為止，圓盤轉過的角度最多為 $\theta \leq \Omega(k^2+a^2)t/k^2$，這是有限的。對任何有限的 θ，$\sinh(\theta+\alpha)$ 都是有限的，所以 $r = k/\sinh(\theta+\alpha) > 0$。此外，對每個 $r>0$，$\dot r$ 都嚴格為負，所以質點永遠不會停下來再折返：這些公式對所有 t 都成立，而 r 不斷減小並趨向 0，卻永遠不會到達。

（另一做法是直接從 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 的方程入手：由 a 走到 r 所需的時間為 $\frac{k}{\Omega(k^2+a^2)}\int_r^a \frac{\sqrt{k^2+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$，而在 $x=0$ 附近，被積函數的表現有如 k/x，其積分在 $r\to 0$ 時以對數方式發散（diverge）。）

驗算

- 在 $t=0$ 時，$r=a$ 給出 $\omega = \Omega$ 和 $\dot r = -\Omega a\sqrt{k^2+a^2}/k = -V$，與初始數據吻合；而 $\theta = 0$ 給出 $r = k/\sinh\alpha = a$。
- 當 θ 很大時，$r \approx 2ke^{-(\theta+\alpha)}$：質點以指數方式螺旋向內，與永遠不會到達的結論一致。
- 數值上，對隨機選取的 k, a, Ω 逐步計算運動方程（$\ddot r = r\omega^2$，角動量固定），所得的 $\dot r$、能量和 $r\sinh(\theta+\alpha) = k$ 均吻合至約 10^{-12}。取 $k = a = \Omega = 1$ 時，到達 $r = 10^{-8}$ 所需的時間約為 9.32，增長方式有如 $\frac{1}{2}\ln(1/r)$。

常見錯誤

- 以為質點本身的能量守恆：凹槽的反作用力對質點作功，守恆的只是總能量。
- 在質點的動能或角動量中漏掉橫向速度 $r\omega$。
- 只憑 θ 有限時 $r > 0$ 便斷定質點永遠不會到達轉軸，卻沒有檢查 θ 在有限時間內是否保持有限。

STEP 之外

關於 V 的特殊條件，令質點恰好落在永遠向 $r = 0$ 緩緩靠近的軌跡上：在旋轉參考系（rotating frame）中，$r = 0$ 是一個不穩定平衡點（unstable equilibrium），而這條軌跡就是它的*穩定流形*（*stable manifold*）。V 只要稍大一點，質點便會穿過中心；稍小一點，質點便會折返。這類想法，連同耦合物體的守恆定律，可見於 Kleppner 與 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。