詳細解答

STEP II 1990，第 10 題

純數學 • 矩陣多項式方程

> **STEP II 1990，第 10 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q10

關鍵思路

行列式（determinant）把矩陣（matrix）的乘積化為普通數字的乘積，而實數的乘積為零，必定是其中一個因子為零。至於那個三次式，$\mathbf{M}$ 與 $\mathbf{I}$ 可交換（commute），所以 $\mathbf{M}$ 的矩陣多項式的因式分解，與 x 的多項式完全一樣。上三角矩陣（upper triangular matrix）的表現則十分理想：乘積的對角線元素就是各對角線元素的乘積，所以對角線很快便可處理好，只有右上角才需要真正花工夫。

解答

滿足 $\mathbf{AB} = 0$ 的矩陣

由於乘積的行列式等於行列式的乘積，

$$\det \mathbf{A} \, \det \mathbf{B} = \det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{0} = 0.$$

左方是兩個實數的乘積，所以其中至少一個為零：$\det \mathbf{A} = 0$，或 $\det \mathbf{B} = 0$，或兩者皆為零。這就是所需的結果。

若 $\det \mathbf{B} \neq 0$，則 $\mathbf{B}^{-1}$ 存在，把 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 右乘 $\mathbf{B}^{-1}$，得

$$\mathbf{A} = \mathbf{ABB}^{-1} = \mathbf{0}\,\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0}.$$

所以 $\mathbf{A}$ 必定是零矩陣（zero matrix）。

不過，兩個行列式皆為零並不足夠。取

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

則 $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = 0$，但 $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$。

三次式的因式分解

首先把多項式 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 因式分解。試代 6 的細小因數：

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + 2 + 5 - 6 = 0, \\ f(2) &= 8 + 8 - 10 - 6 = 0, \\ f(-3) &= -27 + 18 + 15 - 6 = 0, \end{aligned}$$

由於首項係數為 1，所以 $f(x) = (x+1)(x-2)(x+3)$。

現在展開 $(\mathbf{M} + p\mathbf{I})(\mathbf{M} + q\mathbf{I})(\mathbf{M} + r\mathbf{I})$。因為 $\mathbf{I}$ 與 $\mathbf{M}$ 可交換（而且 $\mathbf{I}^2 = \mathbf{I}$），展開的結果與數字的情況完全相同：

$$\mathbf{M}^3 + (p+q+r)\mathbf{M}^2 + (pq + qr + rp)\mathbf{M} + pqr\,\mathbf{I}.$$

與上面的多項式比較，我們可取

$$p = 1, \qquad q = -2, \qquad r = 3$$

（次序不拘），於是對任何方陣 $\mathbf{M}$，都有 $\mathbf{M}^3 + 2\mathbf{M}^2 - 5\mathbf{M} - 6\mathbf{I} = (\mathbf{M} + \mathbf{I})(\mathbf{M} - 2\mathbf{I})(\mathbf{M} + 3\mathbf{I})$。

> ? **想一想** 我們現在可否斷定三個因子之中必有一個是零矩陣？

不可以。第一部分已經說明，矩陣的乘積可以為零，而沒有任何一個因子為零；我們只知道至少有一個因子是奇異（singular）的。所以我們必須動手計算。

上三角矩陣的解

設 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$。每個因子都是上三角矩陣，而且右上角的元素同樣是 c：

$$\mathbf{M} + k\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a+k & c \\ 0 & b+k \end{pmatrix}.$$

對於三個對角線為 (d_i, e_i)、右上角元素全為 c 的上三角矩陣，乘開後得

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} d_1 & c \\ 0 & e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 & c \\ 0 & e_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_3 & c \\ 0 & e_3 \end{pmatrix} \\ &\quad = \begin{pmatrix} d_1 d_2 d_3 & c\,(d_1 d_2 + d_1 e_3 + e_2 e_3) \\ 0 & e_1 e_2 e_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

取 $d_1, d_2, d_3 = a+1, a-2, a+3$ 及 $e_1, e_2, e_3 = b+1, b-2, b+3$，方程便化為三個條件：

$$\begin{aligned}(a+1)(a-2)(a+3) &= 0,\\ (b+1)(b-2)(b+3) &= 0,\\ c\,[(a+1)(a-2)+(a+1)(b+3)+(b-2)(b+3)] &= 0.\end{aligned}$$

頭兩個條件表示 $a, b \in \{-1,\ 2,\ -3\}$。把第三個條件中的括號展開，

$$(a^2-a-2)+(ab+3a+b+3)+(b^2+b-6) = a^2+ab+b^2+2(a+b)-5.$$

> **想一想** 要看出這個括號何時為零，有沒有比逐一試驗全部九對數值更聰明的方法？

有。若 $a \neq b$，括號等於

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}+2\,\frac{a^2-b^2}{a-b}-5\,\frac{a-b}{a-b} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b},$$

由於 $f(a) = f(b) = 0$，此式為 0。所以當 $a \neq b$ 時，無論 c 是甚麼，第三個條件都成立。

若 $a = b$，括號等於 $3a^2+4a-5 = f'(a)$。在 $a = -1, 2, -3$ 時，其值分別為 -6、15 和 10（全部不為零，因為 f 有三個相異的根），所以第三個條件迫使 $c = 0$。

因此，解為：

- $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$，其中 a 和 b 是 $\{-1, 2, -3\}$ 中兩個不同的數，而 c 是任意實數（共六族）；
- 三個純量矩陣（scalar matrix）$-\mathbf{I}$、$2\mathbf{I}$ 和 $-3\mathbf{I}$（即 $a = b$ 的情況，此時必有 $c = 0$）。

驗算

取 $a = -1$、$b = 2$、$c = 5$。則 $\mathbf{M}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$、$\mathbf{M}-2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 及 $\mathbf{M}+3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$。頭兩個的乘積已經是 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以無論 c 取何值，整個乘積都是零。另一方面，$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 給出 $\mathbf{M}^3+2\mathbf{M}^2-5\mathbf{M}-6\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$，與 $f'(2) = 15$ 吻合。以電腦搜尋大量有理數 a, b, c，所得的解恰好就是上述各解；因式分解亦已用隨機的 3×3 整數矩陣驗證。

常見錯誤

- 由 $(\mathbf{M}+\mathbf{I})(\mathbf{M}-2\mathbf{I})(\mathbf{M}+3\mathbf{I})=\mathbf{0}$ 斷定 $\mathbf{M}$ 必定是 $-\mathbf{I}$、$2\mathbf{I}$ 或 $-3\mathbf{I}$。第一部分正是為了提醒你不要犯這個錯。
- 遺漏 $a=b$ 的情況，或以為在這情況下 c 同樣可以任意取值。
- 為第一部分舉例時，不慎寫出一個 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ 的例子；要檢查你的乘積確實不是零。

STEP 之外

這個答案讓我們初次窺見*最小多項式*（minimal polynomial）：一個矩陣滿足某個具相異根的多項式，當且僅當它可對角化（diagonalisable），而且其特徵值（eigenvalue）都在這些根之中。我們那些 $a\neq b$ 的解，對任何 c 都可對角化；而 $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$ 在 $c\neq 0$ 時則不可對角化，這正是它不成立的原因。右上角出現的均差（divided difference）$\big(f(a)-f(b)\big)/(a-b)$，在 $a=b$ 時變成 $f'(a)$，一般的矩陣函數正是這樣定義的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）對特徵值和對角化有清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。