詳細解答

STEP II 1990，第 1 題

純數學 • 多項式不等式

> **STEP II 1990，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q1

關鍵思路

沒有實根（real roots）的四次多項式（quartic），其實就是一個恆為正的四次多項式，所以我們要設法把它拆成若干個我們*確知*為非負（non-negative）的部分：完全平方（perfect square），或者在某個區間（interval）上正負號一目了然的乘積。沒有哪一種拆法能處處適用，但不同的拆法在不同的區間上奏效，合起來便覆蓋整條實數線。第一部分把這些部件直接交給我們；到了最後一部分，就要自己動手去找。

解答

兩個非負的表達式

把四次式因式分解（factorise），並對二次式配方（completing the square），

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2\left(x^2 - 2x + 1\right) = x^2(x-1)^2,$$
$$x^2 - 8x + 17 = (x-4)^2 + 1.$$

第一個是兩個平方的乘積，所以對任何實數 x 都 ≥ 0。第二個是一個平方加 1，所以至少是 1，自然也是非負的。

第一個方程

設 $p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 17$。留意 p *並不是*上面兩個表達式之和（那個和含有 $2x^2$，而不是 x^2），所以不能簡單地把兩者相加。我們改為在每個區間上用不同的方式拆開 p，從而證明 $p(x) > 0$ 處處成立。

想一想 題目給了兩個非負的表達式，但它們加起來並不等於 $p(x)$。我們還可以怎樣利用它們？

兩者都可以在實數線的某一段上「借用」：在一個區間上，我們保留四次式 $x^2(x-1)^2$，然後直接處理餘下的 $17-8x$；在另一個區間上，我們保留二次式 $(x-4)^2+1$，然後直接處理餘下的 x^4-2x^3。

情況 $x \le 0$。　這時 $x^4 \ge 0$、$-2x^3 \ge 0$（因為 $x^3 \le 0$）、$x^2 \ge 0$ 以及 $-8x \ge 0$。所以 $p(x)$ 的每一項都是非負的，再加上常數項 17，總和至少是 17。因此 $p(x) > 0$。

情況 $0 < x \le 2$。　寫成

$$p(x) = x^2(x-1)^2 + (17-8x).$$

第一部分 ≥ 0，而由於 $x \le 2$，我們有 $17-8x \ge 17-16 = 1$。所以 $p(x) \ge 1 > 0$。

情況 $x > 2$。　寫成

$$p(x) = x^3(x-2) + \left(x^2 - 8x + 17\right) = x^3(x-2) + (x-4)^2 + 1.$$

由於 $x > 2$，x^3 和 $x-2$ 都是正數，所以 $x^3(x-2) > 0$；而 $(x-4)^2+1 \ge 1$。所以 $p(x) > 1 > 0$。

這三個區間覆蓋了所有實數，而在每個區間上都有 $p(x) > 0$，所以 $p(x) = 0$ 沒有實根。

第二個方程

設 $q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 4$。我們沿用同樣的方法，不過這次要自己選擇拆法。

想一想 應該在哪裏把實數線分段？又應該把哪些項配成一組？

我們希望每一組在各自的區間上都有明顯的正負號。$4-4x = 4(1-x)$ 這一組在 $x \le 1$ 時是非負的。當 $x \ge 1$ 時，$x^4 - x^3 = x^3(x-1)$ 這一組是非負的，而餘下的 $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ 是一個完全平方。所以最自然的分界點是 $x = 1$。

情況 $x \le 1$。　寫成

$$q(x) = \left(x^4 - x^3 + x^2\right) + 4(1-x) = x^2\left[\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\right] + 4(1-x).$$

第一項 ≥ 0，而且只在 $x = 0$ 時才等於零（方括號內的值至少是 $\frac{3}{4}$）。第二項因 $x \le 1$ 而 ≥ 0，而且只在 $x = 1$ 時才等於零。兩項不可能同時為零，所以 $q(x) > 0$。

情況 $x \geq 1$。 寫成

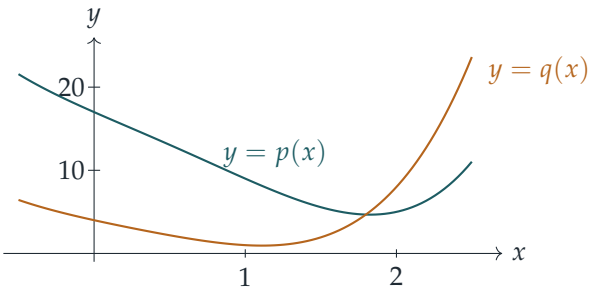
$$q(x) = x^3(x-1) + \left(x^2 - 4x + 4\right) = x^3(x-1) + (x-2)^2.$$

當 $x \geq 1$ 時，x^3 和 $x-1$ 都是非負的，所以第一項 ≥ 0，而且只在 $x = 1$ 時才等於零。第二項是一個平方，只在 $x = 2$ 時才等於零。兩者同樣不可能同時為零，所以 $q(x) > 0$。

所以對所有實數 x 都有 $q(x) > 0$，而 $q(x) = 0$ 沒有實根。

驗算

- 把每一種拆法展開，確保它確實還原成 p 或 q。例如 $x^3(x-1) + (x-2)^2 = x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 4$。
- 在 $-5 \leq x \leq 8$ 的範圍內以 10^{-4} 為步長作數值掃描，得出 p 的最小值約為 4.67（在 $x \approx 1.83$ 附近），而 q 的最小值約為 0.94（在 $x \approx 1.11$ 附近）。兩者都明顯是正數，正如下圖所示。



常見錯誤

- 把題目給出的兩個表達式相加，然後聲稱其和就是 $p(x)$：其實並不是，因為 x^2 項對不上。
- 由「非負項加非負項」就斷定 $q(x) > 0$。這樣只能得出 $q(x) \geq 0$；要排除有根的可能，必須證明兩項不可能同時為零。
- 以為 $-2x^3$ 或 $-8x$ 永遠是負數。當 $x \leq 0$ 時，它們非但無害，反而有幫助。

STEP 之外

把多項式（polynomial）寫成平方和（sum of squares）來證明它是正的，是一個很有份量的課題。每一個非負的單變量多項式，都是兩個實係數多項式的平方之和，但希爾伯

特（Hilbert）證明了這個結論在多變量的情況下並不成立，由此引出了他的第十七個問題。時至今日，人們在最優化（optimisation）問題中會利用電腦去搜尋這類分解。如果想學習更多這一類不等式技巧，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 是下一步的好選擇。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。