詳細解答

STEP I 1990，第 9 題

純數學 • 切線與面積的界限

> **STEP I 1990，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q9

關鍵思路

曲線 $y = 1/x$ 向上彎曲（即它是凸（convex）的），所以每一條切線（tangent）都位於曲線之下。因此，兩條切線下方的兩個梯形（trapezium）都包含在曲線下方由 $x = 1$ 至 $x = b$ 的區域之內，而該區域的面積為 $\ln b$。比較這兩個面積，便得到對數的下界（lower bound）。同樣道理，一個位於曲線之上的長方形則給出上界（upper bound）。

解答

點 C

對於 $y = 1/x$，我們有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1/x^2$。所以在 $(t, 1/t)$ 的切線為

$$y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t), \qquad \text{即} \qquad y = \frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}.$$

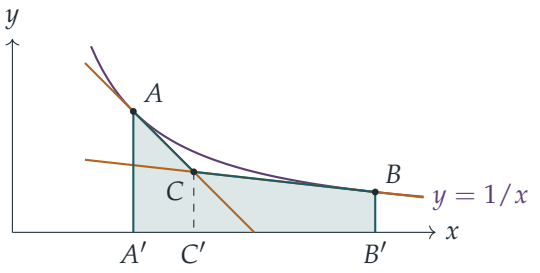
取 $t = 1$，在 A 的切線為 $y = 2 - x$。取 $t = b$，在 B 的切線為 $y = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2}$。在兩線相交之處，

$$2 - x = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2} \quad \Longrightarrow \quad x\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right).$$

由於 $b > 1$，我們可以除以 $1 - \frac{1}{b} \neq 0$，餘下 $x\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 2$。因此

$$C = \left(\frac{2b}{b+1}, \frac{2}{b+1}\right),$$

其中 y 坐標由 $y = 2 - x$ 求得。注意 $1 < \frac{2b}{b+1} < b$：左邊的不等式（inequality）即 $b + 1 < 2b$，右邊的即 $2 < b + 1$。兩者皆因 $b > 1$ 而成立，所以 C 在水平方向上位於 A 與 B 之間。



此圖按 $b = 3$ 繪畫。陰影區域由該兩個四邊形（quadrilateral）組成。

面積之和

每個四邊形都有兩條鉛垂的邊，所以它是梯形，其面積等於闊度乘以兩條鉛垂邊的平均值。

對於 $ACC'A'$，闊度為 $\frac{2b}{b+1} - 1 = \frac{b-1}{b+1}$，而兩條鉛垂邊分別為 1 和 $\frac{2}{b+1}$：

$$\text{面積}(ACC'A') = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-1}{b+1}\left(1 + \frac{2}{b+1}\right) = \frac{(b-1)(b+3)}{2(b+1)^2}.$$

對於 $CBB'C'$，闊度為 $b - \frac{2b}{b+1} = \frac{b(b-1)}{b+1}$，而兩條鉛垂邊分別為 $\frac{2}{b+1}$ 和 $\frac{1}{b}$：

$$\text{面積}(CBB'C') = \frac{1}{2} \cdot \frac{b(b-1)}{b+1}\left(\frac{2}{b+1} + \frac{1}{b}\right) = \frac{(b-1)(3b+1)}{2(b+1)^2}.$$

兩式相加，分子合併為 $(b-1)(4b+4) = 4(b-1)(b+1)$，所以

$$\text{面積}(ACC'A') + \text{面積}(CBB'C') = \frac{2(b-1)}{b+1}.$$

不等式

想一想 為甚麼兩個梯形必定包含在曲線之下？

對於 $x > 0$，曲線與在 $(t, 1/t)$ 的切線之間的差距為

$$\frac{1}{x} - \left(\frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}\right) = \frac{t^2 - 2tx + x^2}{t^2 x} = \frac{(x-t)^2}{t^2 x} \geq 0.$$

所以對所有 $x > 0$，每條切線都位於曲線上或曲線之下。陰影區域的上邊界，在 $[1, \frac{2b}{b+1}]$ 上是在 A 的切線，在 $[\frac{2b}{b+1}, b]$ 上是在 B 的切線。兩段都位於 $y = 1/x$ 之下，而該區域位於 x 軸之上。所以陰影區域包含在曲線下方由 $x = 1$ 至 $x = b$ 的區域之內，而

$$\frac{2(b-1)}{b+1} \leq \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln b.$$

至於上界，當 $x \geq 1$ 時 $\frac{1}{x} \leq 1$，所以曲線下方的區域位於以 $A'B'$ 為底、高為 1 的長方形之內。因此

$$\ln b = \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \int_1^b 1\,\mathrm{d}x = b - 1.$$

現設 $z > 0$ 並取 $b = 1 + z$，於是 $b > 1$，符合要求。這時 $b - 1 = z$ 及 $b + 1 = 2 + z$，兩個不等式合起來就是

$$\frac{2z}{2+z} \leq \ln(1+z) \leq z,$$

這正是我們要證明的結果。（事實上，當 $z > 0$ 時兩個不等式都是嚴格的，因為曲線與作為邊界的直線只在孤立的點相交。）

驗算

- 當 $b = 1$ 時，C 會是 $(1,1) = A$，而面積之和會是 0，與預期相符。
- 當 $b = 2$ 時：$C = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$，面積之和為 $\frac{2}{3} \approx 0.667$，僅略小於 $\ln 2 \approx 0.693$，而後者又小於 1。
- 對於細小的 z，$\frac{2z}{2+z} = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$ 與 $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$ 直至 z^2 項都一致，所以下界在 0 附近非常精確。

我們以精確運算對若干個 b 值驗算了坐標和兩個梯形的面積，並對 10^5 個介乎 10^{-6} 與 10^6 之間的隨機 z 值驗算了該不等式。

常見錯誤

- 忘記檢查 C 是否位於 $x = 1$ 與 $x = b$ 之間。缺少這一步，那些「四邊形」未必是你所想像的形狀。
- 聲稱「從圖中可見」切線位於曲線之下。用 $(x - t)^2$ 作出的那一行計算，才令它成為一個證明。

STEP 之外

用簡單的圖形從上方和下方與函數的圖像作比較，正是黎曼和（Riemann sum）背後的想法，也是大學第一門分析（analysis）課程中嚴格定義積分的方法。凸函數（convex function）的切線位於其圖像之下，這個事實是凸函數理論的起點。由此可推出延森不等式（Jensen's inequality）以及許多經典不等式，包括算術平均—幾何平均不等式（AM–GM）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析入門教科書）正是按這種精神建立積分理論的。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。