詳細解答

STEP I 1990，第 8 題

純數學 • 三角函數無窮乘積

> **STEP I 1990，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q8

關鍵思路

二倍角公式（double-angle formula）$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 可把每個餘弦化成兩個正弦之比：$\cos\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2\sin\theta}$。把這些比值相乘，幾乎所有項都會互相抵消，情況就如裂項相消的和（telescoping sum）一樣。一旦把有限乘積化成一個簡潔的分數，令 $n \to \infty$ 時便只需用到標準極限（limit）：當 $x \to 0$ 時 $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$。

解答

關於 α 的條件

以下每一步都要除以某個 $m \geq 0$ 所對應的 $\sin(\alpha/2^m)$，所以必須確保這些值永不為零。若 $\sin(\alpha/2^m) = 0$，則對某個整數 j 有 $\alpha/2^m = j\pi$，於是 $\alpha = (2^m j)\pi$ 是 π 的整數倍，而這種情況已被排除。因此對所有 $m \geq 0$ 都有 $\sin(\alpha/2^m) \neq 0$。

兩個餘弦的乘積

兩次運用 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$，先取 $\theta = \alpha/2$，再取 $\theta = \alpha/4$，得

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\\ &= 2\left(2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\right)\cos\frac{\alpha}{2} = 4\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}.\end{aligned}$$

由於 $\sin(\alpha/4) \neq 0$，我們可以除以 $4\sin(\alpha/4)$，得出

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4} = \frac{\sin\alpha}{4\sin(\alpha/4)},$$

這正是所需的結果。

n 個餘弦的乘積

記 $P_n = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}$。我們對 n 用歸納法（induction）證明

$$P_n = \frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)}.$$

當 $n = 1$ 時，上式即 $\cos\frac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{2\sin(\alpha/2)}$，也就是把二倍角公式除以 $2\sin(\alpha/2) \neq 0$ 所得的結果。（$n = 2$ 的情況就是剛才證明的結果。）

現假設公式對某個 $n \geq 1$ 成立。在二倍角公式中取 $\theta = \alpha/2^{n+1}$，得 $\sin\frac{\alpha}{2^n} = 2\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}}$。因此

$$\begin{aligned} P_{n+1} = P_n\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} &= \frac{\sin\alpha}{2^n\sin(\alpha/2^n)}\cos\frac{\alpha}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\sin\alpha\,\cos(\alpha/2^{n+1})}{2^n\cdot 2\sin(\alpha/2^{n+1})\cos(\alpha/2^{n+1})} = \frac{\sin\alpha}{2^{n+1}\sin(\alpha/2^{n+1})}. \end{aligned}$$

約去 $\cos(\alpha/2^{n+1})$ 是合理的：它是 $\sin(\alpha/2^n)$ 的一個因子，而後者不為零，所以它本身也不為零。這正是 $n+1$ 時的公式，故由歸納法可知，公式對所有正整數 n 都成立。

令 $n \to \infty$

無窮乘積（infinite product）的意思，是部分積（partial products）P_n 的極限。設 $x_n = \alpha/2^n$，則當 $n \to \infty$ 時 $x_n \to 0$，並且

$$2^n\sin\frac{\alpha}{2^n} = \alpha\cdot\frac{\sin x_n}{x_n} \longrightarrow \alpha\cdot 1 = \alpha.$$

想一想 為甚麼可以放心地把 $\lim P_n = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ 上下倒轉？

因為這個極限不是零：對我們所考慮的 α，有 $\alpha \neq 0$ 及 $\sin\alpha \neq 0$。所以 $P_n \to \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} \neq 0$，無窮乘積存在，而以它除 $\sin\alpha$ 便得

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{8}\cdots} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\alpha}{P_n} = \lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\alpha}{2^n} = \alpha,$$

這就是所需的公式。

$\pi/2$ 的公式

取 $\alpha = \pi/2$，它不是 π 的整數倍，並留意 $\sin\alpha = 1$。於是

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots}.$$

餘下要證明的，是這些餘弦正是那些嵌套平方根（nested square roots）。對 $k \geq 1$，記 $c_k = \cos(\pi/2^{k+1})$。那麼 $c_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$。在半角公式（half-angle formula）$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$ 中取 $\theta = \pi/2^{k+2}$，得

$$c_{k+1}^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}c_k, \qquad \text{所以} \qquad c_{k+1} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}c_k},$$

這裏取正根，是因為 $0 < \pi/2^{k+2} < \pi/2$，所以 $c_{k+1} > 0$。因此

$$c_1 = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad c_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}, \quad c_3 = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}, \quad \ldots,$$

而每個因子都是把前一個因子代入 $t \mapsto \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t}$ 所得。這些正好就是所需乘積中的各個因子，所以

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}.$$

驗算

- 取 $\alpha = \pi/2$ 及 $n = 1$，有限乘積的公式給出 $\cos\frac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2\sin(\pi/4)} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，結果正確。
- 嵌套根式（nested radicals）各部分積的倒數依次為 1.4142、1.5307、1.5607、1.5683、1.5702, . . . ；乘到第 60 個因子後得到 1.5707963267949，在機器精度之內與 $\pi/2$ 吻合。
- 對隨機選取的 α 以及不超過 14 的 n，有限乘積的恆等式在數值上同樣成立；而對 $\alpha = 2.5$ 和 $\alpha = -4$ 等數值，$\sin\alpha / P_{60}$ 也能重現 α。

常見錯誤

- 除以 $\sin(\alpha/2^n)$ 而沒有說明它為何不為零。這正是設下條件 $\alpha \neq k\pi$ 的原因。
- 寫出 $1/\lim P_n = \lim(1/P_n)$ 而沒有指出 $\lim P_n \neq 0$。
- 在半角公式一步中，忘記說明為何取正平方根。

STEP 之外

最後的公式就是 1593 年的韋達（Viète）乘積，是歷史上第一個寫下來的 π 的精確無窮表達式。到了大學，你會在分析學（analysis）中正式學習無窮乘積：若一個由非零因子組成的乘積，其部分積趨向一個非零的極限，便稱該乘積收斂（converge），而這正是我們剛才檢查過的一點。歐拉（Euler）的乘積 $\sin\alpha = \alpha\prod_{k\geq 1}\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2\pi^2}\right)$ 則是與它一脈相

承而更為深刻的結果。Abbott 的 *Understanding Analysis* 是一本平易近人的書，可以從中看到這些極限如何得到嚴謹的處理。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。