詳細解答

STEP I 1990，第 7 題

純數學 • 一階線性常微分方程

> **STEP I 1990，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q7

關鍵思路

設 $y = uv$ 之後，我們有兩個未知函數，但其實只需要一個，所以大可對其中一個多加一個條件。最自然的選擇，是讓 u 消去含 P 的那一項，餘下的微分方程（differential equation）便可直接積分。這其實是喬裝了的積分因子法（integrating-factor method）：$1/u$ 正正就是積分因子。

解答

代換

設 $y = uv$，由乘積法則（product rule）得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，於是方程變成

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Pu\right) = Q.$$

如果我們選取 u 使它滿足一階方程（first order equation）

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + Pu = 0,$$

括號內的式子便等於零，餘下

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{Q}{u},$$

這正是題目所要求的、只以 x、Q 和 u 表示 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的方程。（要作除法，必須有 $u \neq 0$；$u' + Pu = 0$ 的非零解是 $u = A\mathrm{e}^{-\int P\,\mathrm{d}x}$，其中 $A \neq 0$，這些解永不為零。）

題中的方程

這裏 $P = -\dfrac{2}{x+1}$，$Q = (x+1)^{5/2}$。留意 Q 只在 $x \geq -1$ 時才有定義（作為實數），而 P 在 $x = -1$ 處沒有定義，所以我們在 $x > -1$ 上求解，此時 $x+1 > 0$。

? **想一想** 我們需要 u 的通解（general solution）嗎？還是任何一個解都可以？

任何一個非零解都可以：最終答案中的任意常數，會在積分求 v 時出現。於是我們用分離變數法（separating variables）解

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u}{x+1}$$

得 $\ln|u| = 2\ln(x+1) + \text{常數}$，並取

$$u = (x+1)^2.$$

（驗算：$u' = 2(x+1) = \frac{2u}{x+1}$。）於是

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+1)^{5/2}}{(x+1)^2} = (x+1)^{1/2}, \qquad \text{所以} \qquad v = \tfrac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C.$$

因此通解是

$$y = uv = \tfrac{2}{3}(x+1)^{7/2} + C(x+1)^2.$$

代入 $y(1) = 0$：

$$0 = \tfrac{2}{3}\cdot 2^{7/2} + 4C \quad \Longrightarrow \quad C = -\tfrac{1}{6}\cdot 2^{7/2} = -\tfrac{1}{6}\cdot 8\sqrt{2} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

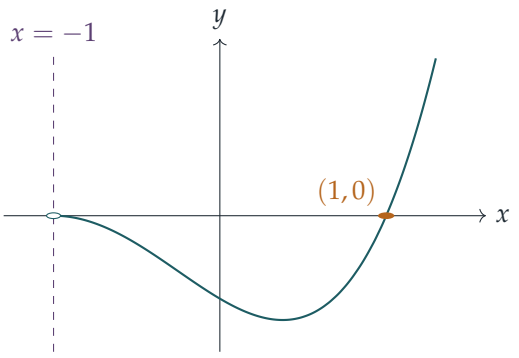
所以

$$\boxed{y = \tfrac{2}{3}(x+1)^{7/2} - \tfrac{4\sqrt{2}}{3}(x+1)^2 = \tfrac{2}{3}(x+1)^2\left[(x+1)^{3/2} - 2\sqrt{2}\right]}$$

解在何處成立

? **想一想** y 的公式在 $x = -1$ 處是有意義的。為甚麼不把 $x = -1$ 包括在內？

這個解在 $x > -1$ 時成立。當 $x < -1$ 時，右邊的 $(x+1)^{5/2}$ 不是實數，所以微分方程本身在那裏毫無意義（我們的 $(x+1)^{7/2}$ 也一樣）。在 $x = -1$ 處，$\frac{2y}{x+1}$ 這一項沒有定義，所以方程在那裏同樣不成立，儘管按我們的公式，當 $x \to -1^+$ 時 $y \to 0$。在整個區間 $x > -1$ 上，由於 $x+1 > 0$，上面每一步都站得住腳，而且解經過題目給定的點 $x = 1$，這一點正在此區間之內。



空心圓圈標示被排除的端點 $x = -1$。

驗算

- 代回原方程：$y' = \frac{7}{3}(x+1)^{5/2} - \frac{8\sqrt{2}}{3}(x+1)$，而 $\frac{2y}{x+1} = \frac{4}{3}(x+1)^{5/2} - \frac{8\sqrt{2}}{3}(x+1)$；兩者之差是 $(x+1)^{5/2}$，符合要求。
- $y(1) = \frac{2}{3} \cdot 4\left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right) = 0$。
- 特殊值：$y(0) = \frac{2-4\sqrt{2}}{3} \approx -1.219$，$y(3) = \frac{256-64\sqrt{2}}{3} \approx 55.16$。由 $y(1) = 0$ 出發，對方程作數值積分（龍格－庫塔法，Runge–Kutta），所得結果與這兩個值吻合至九位有效數字。

常見錯誤

- 弄錯 P 的正負號：這裏 $P = -\frac{2}{x+1}$，所以 $u = (x+1)^2$，而不是 $(x+1)^{-2}$。
- 積分求 v 時漏掉常數，結果沒有餘地去滿足 $y(1) = 0$。
- 把範圍寫成 $x \geq -1$：方程在 $x = -1$ 處沒有定義。

STEP 之外

選取 u 來消去麻煩的一項，正是*參數變易法*（variation of parameters）背後的想法：先解齊次方程（homogeneous equation），然後讓那個「常數」變動起來，以吸收外加項（forcing）。同樣的技巧也適用於二階線性方程；至於解在何處成立這個問題，則發展成存在與唯一性定理（existence and uniqueness theorem），它保證在 P 和 Q 皆連續的任何區間上都有唯一的解。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）對兩者都有論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。