詳細解答

STEP I 1990，第 6 題

純數學 • 向量與平行四邊形

STEP I 1990，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s1-q6

關鍵思路

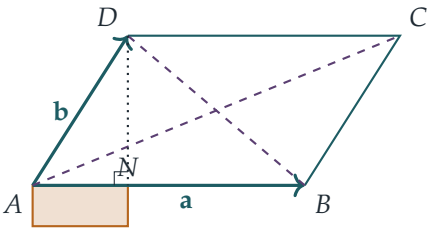
把原點設在 A，並用兩條邊的向量（vector）$\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ 和 $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$ 來描述一切。這樣，兩條對角線（diagonal）就是 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{b}-\mathbf{a}$，而每個長度的平方都是一個向量與自身的點積（dot product）。把這些點積展開，整道題就解決了。唯一用到的幾何事實是：$|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|$ 等於 $\mathbf{u}$ 的長度乘以 $\mathbf{v}$ 在 $\mathbf{u}$ 上的投影（projection）的長度。

解答

取 A 為原點，設 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ 及 $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$。由於 $ABCD$ 是平行四邊形（parallelogram），$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$，所以

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}+\mathbf{b}, \qquad \overrightarrow{BD} = \mathbf{b}-\mathbf{a}.$$

對任何向量都有 $|\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$，而且點積是對稱的，並對加法滿足分配律。記 $a = |\mathbf{a}|$ 及 $b = |\mathbf{b}|$。



圖中，N 是由 D 到直線 AB 的垂足，所以 AN 是 AD 在 AB 上的投影，其長度為 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|/a$。

第 (i) 部分

對邊相等，所以左方等於 $2a^2 + 2b^2$。至於對角線，

$$AC^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = a^2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + b^2,$$
$$BD^2 = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = a^2 - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + b^2.$$

兩式相加，交叉項互相抵消，得 $AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$，這正是所要證明的。（這個結果通常稱為平行四邊形定律（parallelogram law）。）

第 (ii) 部分

這次改為把同樣的兩式相減，

$$AC^2 - BD^2 = 4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}, \qquad \text{所以} \qquad \left|AC^2 - BD^2\right| = 4\,|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|.$$

現在來解釋 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ 的意義。若 θ 是 $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 之間的夾角，則 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = a\cdot b|\cos\theta|$，而 $b|\cos\theta|$ 正好是 AD 在 AB 上的投影的長度 AN。所以 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$ 就是以 AB 和 AD 在 AB 上的投影為邊的長方形（圖中的陰影部分）的面積。

> **想一想** 題目聲稱這個結果對任何一條邊和它任何一條鄰邊都成立。為甚麼我們不需要分別做八次計算？

平行四邊形的每條邊都是向量 $\pm\mathbf{a}$ 或 $\pm\mathbf{b}$，而與它相鄰的兩條邊，除了正負號之外，就是另一個向量。例如，邊 BC 是 $\mathbf{b}$，它的鄰邊 AB 和 CD 分別是 $\mathbf{a}$ 和 $-\mathbf{a}$。改變正負號並不會改變向量的長度，也不會改變投影的長度，因為投影的長度是 $|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|/|\mathbf{u}|$。所以無論選哪一條邊和哪一條鄰邊，所得的長方形面積都同樣是 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$：它或是 $a\times$ (向量$\mathbf{b}$ 投影於$\mathbf{a}$)，或是 $b\times$ (向量$\mathbf{a}$ 投影於$\mathbf{b}$)，而兩者都等於 $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$。因此，在所有情況下，

$$\left|AC^2 - BD^2\right| = 4\times(\text{該長方形的面積}). \qquad \blacksquare$$

最後部分

第 (ii) 部分來自兩條邊的點積。現在把邊和對角線的角色對調，考慮兩條對角線的點積：

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = b^2 - a^2,$$

因為交叉項 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 和 $-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ 互相抵消。因此

$$\left|AB^2 - AD^2\right| = |\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|.$$

仿照第 (ii) 部分的論證，便得到以下結果。

結果。$\left|AB^2 - AD^2\right|$ 等於以下長方形的面積：它的兩邊分別是任何一條對角線，以及另一條對角線在它上面的投影。

證明。若 φ 是兩條對角線之間的夾角，則 $\left|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}\right| = AC \cdot BD\left|\cos\varphi\right|$。這裏 $BD\left|\cos\varphi\right|$ 是 BD 在 AC 上的投影的長度，而 $AC\left|\cos\varphi\right|$ 是 AC 在 BD 上的投影的長度。所以無論從哪一條對角線出發，面積都相同，而且由上面的式子可知它等於 $\left|AB^2 - AD^2\right|$。■

想讓它看起來更像 (ii)，可設 O 為兩條對角線互相平分的那一點。這樣 $AC = 2OA$，而 BD 在 AC 上的投影是 OB 在 OA 上的投影的兩倍。所以 $\left|AB^2 - AD^2\right|$ 也等於以 OA 和 OB 在 OA 上的投影為邊的長方形面積的 4 倍：半條對角線現在擔當了邊的角色。

由此還可得出兩個漂亮的推論（corollary）。兩條對角線相等，當且僅當 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$，亦即當且僅當該平行四邊形是長方形。兩條對角線互相垂直，當且僅當 $a = b$，亦即當且僅當它是菱形（rhombus）。

驗算

取 $A = (0,0)$、$B = (4,0)$、$D = (1,2)$，所以 $C = (5,2)$。這樣 $AC^2 = 29$ 及 $BD^2 = 13$，而 $2(16+5) = 42 = 29+13$，驗證了 (i)。至於 (ii)，$AC^2 - BD^2 = 16$，而 AD 在 AB 上的投影長度為 1，所以長方形的面積是 $4 \times 1 = 4$，而 $16 = 4 \times 4$。至於最後部分，$AB^2 - AD^2 = 16 - 5 = 11$，而 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (5,2) \cdot (-3,2) = -11$。我們還用 10^5 個隨機平行四邊形，就每一種邊和鄰邊的選法測試了全部三個結果；最大的偏差約為 10^{-13}，只是捨入誤差而已。

常見錯誤

- 寫成 $\overrightarrow{BD} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ 或 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$。正負號對 BD^2 沒有影響，但把方向寫對可以避免之後出現混亂。
- 忘記取絕對值：當 A 處的角是鈍角時，$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 是負數，但面積不可能是負數，所以題目寫的是 $\left|AC^2 - BD^2\right|$。
- 在最後部分用了整條對角線，卻寫上因子 4。用整條對角線時因子是 1；只有用半條對角線時才會出現因子 4。

STEP 之外

恆等式 $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = 4\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 就是極化恆等式（polarisation identity）：它表明單憑長度就可以還原出點積。它與第 (i) 部分的平行四邊形定律一起，是關於內積空間（inner product space）的關鍵事實。一個範數（norm）來自某個內積，當且僅當它滿足平行四邊形定律，這是約當（Jordan）與馮·諾伊曼（von Neumann）的一條定理。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門）是個好去處，可以看到點積、投影和正交性（orthogonality）如何在任意維數中發展出來。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。