詳細解答

STEP I 1990，第 5 題

純數學 • 部分分式與曲線描繪

> **STEP I 1990，第 5 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q5

關鍵思路

在 (i) 中，二次式可以因式分解，所以用部分分式（partial fractions）便可把積分化為兩個對數之差。在 (ii) 中，巨大的冪次看似嚇人，但 $1760 = 8 \times 220$，所以這個函數其實就是 $u^8 - u + q$，其中 $u = x^{220} \geq 0$。圖像的形狀由駐點（stationary points）決定，而根的數目只取決於橫軸相對於局部極大值（local maximum）和兩個極小值的位置。

解答

第 (i) 部分

由於 $6 \times 15 = 90 = 9 \times 10$ 而 $9 + 10 = 19$，這個二次式可分解為：

$$6x^2 + 19x + 15 = (2x+3)(3x+5).$$

設

$$\frac{1}{(2x+3)(3x+5)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{3x+5}, \qquad \text{所以} \qquad 1 = A(3x+5) + B(2x+3).$$

代入 $x = -\frac{3}{2}$ 得 $\frac{1}{2}A = 1$，所以 $A = 2$；代入 $x = -\frac{5}{3}$ 得 $-\frac{1}{3}B = 1$，所以 $B = -3$。$2x+3$ 和 $3x+5$ 在 $[1,3]$ 上都是正數，所以無須加上絕對值符號：

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{6x^2+19x+15} = \int_1^3 \left(\frac{2}{2x+3} - \frac{3}{3x+5}\right)\mathrm{d}x = \Big[\ln(2x+3) - \ln(3x+5)\Big]_1^3$$
$$= \ln\frac{9}{14} - \ln\frac{5}{8} = \ln\frac{72}{70} = \ln\frac{36}{35}.$$

第 (ii) 部分

對稱性與兩端的變化。兩個冪次都是偶數，所以 f 是偶函數（even function），其圖像對稱於 y 軸。當 $|x|$ 很大時，x^{1760} 一項佔主導，所以當 $x \to \pm\infty$ 時 $\mathrm{f}(x) \to +\infty$。此外，$\mathrm{f}(0) = q$ 而 $\mathrm{f}(\pm 1) = q$。

駐點。求導得

$$\mathrm{f}'(x) = 1760x^{1759} - 220x^{219} = 220\,x^{219}(8x^{1540} - 1).$$

它在 $x = 0$ 處以及 $x^{1540} = \frac{1}{8}$ 之處為零，後者即 $x = \pm a$，其中

$$a = 8^{-1/1540} \approx 0.9987.$$

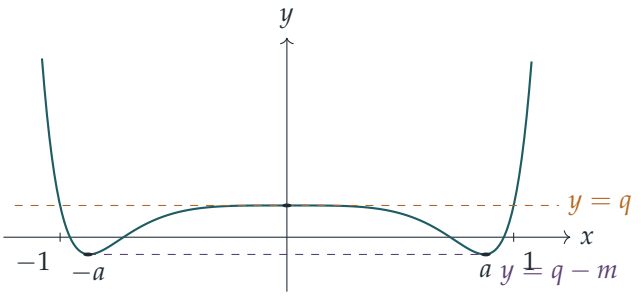
當 $x > 0$ 時，$\mathrm{f}'(x)$ 的正負號與 $8x^{1540} - 1$ 相同：在 $(0, a)$ 上為負，在 $x > a$ 時為正。由於 x^{219} 是奇數次冪，當 $x < 0$ 時正負號剛好相反。所以 f 在 $(-\infty, -a)$ 上遞減，在 $(-a, 0)$ 上遞增，在 $(0, a)$ 上遞減，在 (a, ∞) 上遞增：在 $x = 0$ 處有局部極大值 q，在 $x = \pm a$ 處有兩個相等的極小值。

> **想一想** 怎樣才能求出極小值，而不必跟 $8^{-1/1540}$ 糾纏？

改用 $u = x^{220}$ 來計算。在 $x = \pm a$ 處有 $x^{1540} = u^7 = \frac{1}{8}$，所以 $u = 8^{-1/7}$，而 $u^8 = u \cdot u^7 = \frac{1}{8}u$。因此

$$\mathrm{f}(\pm a) = u^8 - u + q = q - \tfrac{7}{8}u = q - m, \qquad \text{其中} \qquad m = \tfrac{7}{8} \cdot 8^{-1/7} = 7 \cdot 2^{-24/7} \approx 0.650.$$

草圖。圖像呈「W」形：它從高處開始，下降至 $x = -a$ 處的極小值 $q - m$，上升至原點處的局部極大值 q，再下降至 $x = a$ 處的極小值 $q - m$，然後急劇上升。由於冪次極大，真實的圖像極為平坦：除非 $|x|$ 非常接近 1，否則 x^{220} 極小，所以在 $(-1, 1)$ 的大部分範圍內 $\mathrm{f}(x) \approx q$，只在 $x = \pm 1$（圖像在該處回到高度 q）內側不遠處有兩個狹窄的凹陷，而在外側則是近乎垂直的陡壁。下圖把凹陷誇大了，好讓各項特徵清楚可見。



點算根的數目。$\mathrm{f}(x) = 0$ 的根就是圖像與 x 軸相交之處，所以我們把 0 與局部極大值 q 和極小值 $q - m$ 作比較。

- $q > m$：極小值 $q - m$ 為正，所以 $\mathrm{f} > 0$ 處處成立：**沒有根**。
- $q = m$：圖像只在極小值處與橫軸相切：**兩個根**，$x = \pm a$。
- $0 < q < m$：此時 $q - m < 0 < q$。在四個單調區間 $(-\infty, -a)$、$(-a, 0)$、$(0, a)$、(a, ∞) 的每一個上，f 都是連續（continuous）而且嚴格單調（strictly monotonic）的，並且由正值變為負值，或由負值變為正值，所以在每個區間上恰有一個根：**四個根**。
- $q = 0$：$\mathrm{f}(x) = x^{220}(x^{1540} - 1)$，它恰好在 $x = 0$ 和 $x = \pm 1$ 處為零：三**個根**。
- $q < 0$：局部極大值 $\mathrm{f}(0) = q$ 為負，所以在整個 $[-a, a]$ 上 $\mathrm{f} < 0$，而在 (a, ∞) 和 $(-\infty, -a)$ 的每一個上，f 都嚴格單調地由負值變至 $+\infty$：**兩個根**。

所以相異根的數目可能是 0、2、3 和 4，其中

$$\begin{aligned} &0 \text{ 個根：} && q > m, \\ &2 \text{ 個根：} && q < 0 \text{ 或 } q = m, \\ &3 \text{ 個根：} && q = 0, \\ &4 \text{ 個根：} && 0 < q < m, \end{aligned} \qquad m = \tfrac{7}{8} \cdot 8^{-1/7} = 7 \cdot 2^{-24/7} \approx 0.650.$$

驗算

對 (i) 的被積函數使用辛普森法則（Simpson's rule），得 0.0281709，與 $\ln \frac{36}{35} = 0.0281709$ 吻合。至於 (ii)，在 $x = 1$ 附近以細密的數值搜尋求 $x^{1760} - x^{220}$ 的極小值，得出在 $x \approx 0.99865$ 處的 -0.650123，與 $-m$ 和 a 一致。取 $q = 1,\ 0.5,\ 0.1,\ 0.001,\ 0,\ -0.01,\ -5$，在細密的格點上點算 f 的變號次數，得出根的數目為 $0, 4, 4, 4, 3, 2, 2$，與上表的預測相符。$q = 0$ 的情況正好用來檢驗草圖是否合理：圖像必須通過原點和 $(\pm 1, 0)$。

常見錯誤

- 遺漏邊界情況 $q = 0$（三個根，因為局部極大值正好落在橫軸上）和 $q = m$（在極小值處有兩個重根）。
- 當 $q < 0$ 時，「憑對稱性」聲稱有兩個根，卻沒有檢查 $-a$ 與 a 之間是否別無變化：正是因為局部極大值 q 為負，才排除了該處有額外的根。
- 把草圖畫成一條彎度平緩的「W」。冪次這麼大，圖像在 $|x| < 1$ 時幾乎平坦地停留在高度 q；即使草圖誇大了凹陷，也值得把這一點說明。

STEP 之外

透過確定駐點處的函數值來點算根的數目，讓人初嘗介值定理（intermediate value theorem）和單調性論證的滋味，而這些內容會在大學第一門分析課程中嚴格建立起來；代換 $u = x^{220}$ 也顯示出 x^n 在 $n \to \infty$ 時的表現：它在 $(-1, 1)$ 上收斂至 0，但並非一致收斂（uniform convergence）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）對連續性和一致收斂的處理既嚴謹又易讀。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。