詳細解答

STEP I 1990，第 4 題

純數學 • 等差數列與差分

STEP I 1990，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s1-q4

關鍵思路

數列的每一項，都等於首項加上各個差的累計總和。等差數列（arithmetic progression）的差是常數，所以求和很容易。至於雙重等差數列（double arithmetic progression），各個差本身又構成一個等差數列，於是要多做一層求和，二項式係數（binomial coefficient）$\binom{n}{2}$ 和 $\binom{n}{3}$ 便自然出現。最後一部分則化為關於兩個未知差的兩條線性方程。

解答

等差數列

設公差（common difference）為 $d = a_2 - a_1$，則 $a_k = a_1 + (k-1)d$。於是

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + d\sum_{k=1}^{n}(k-1) = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}(a_2 - a_1),$$

其中用到 $0 + 1 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$。把 a_1 和 a_2 的項分別合併，得

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{n}{2}[(3-n)a_1 + (n-1)a_2].$$

雙重等差數列

設各個差為 $\delta_k = b_{k+1} - b_k$。它們構成一個等差數列，首項為 $p = \delta_1 = b_2 - b_1$，公差為

$$e = \delta_2 - \delta_1 = (b_3 - b_2) - (b_2 - b_1) = b_3 - 2b_2 + b_1.$$

因此 $\delta_j = p + (j-1)e$，把首 $k-1$ 個差加起來（即第一部分的公式，把 n 換成 $k-1$），得

$$b_k = b_1 + \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j = b_1 + (k-1)p + \frac{(k-1)(k-2)}{2}\, e = b_1 + \binom{k-1}{1} p + \binom{k-1}{2} e.$$

現在對 $k = 1, \ldots, n$ 求和。我們需要兩個和。第一個是 $\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \binom{n}{2}$，與前面相同。至於第二個，令 $j = k-1$ 由 0 取到 $n-1$，則

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{j(j-1)}{2} &= \frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2}\right] = \frac{n(n-1)}{12}[(2n-1)-3] \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \binom{n}{3}.\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = nb_1 + \binom{n}{2}(b_2 - b_1) + \binom{n}{3}(b_3 - 2b_2 + b_1).$$

這已經是一條以 n、b_1、b_2、b_3 表示的公式。如果你想分別看到每個 b_i 的係數，展開後得

$$b_1 + \cdots + b_n = \frac{n(n^2 - 6n + 11)}{6}\, b_1 + \frac{n(n-1)(7-2n)}{6}\, b_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\, b_3.$$

（快速檢驗：$n = 1, 2, 3$ 分別給出 b_1、$b_1 + b_2$ 和 $b_1 + b_2 + b_3$。）

想一想 有沒有更簡潔的方法看出 $\binom{n}{3}$ 從何而來？

有：$\binom{k-1}{2}$ 是從 $k-1$ 件東西中選 2 件的方法數目，而曲棍球棒恆等式（hockey-stick identity）$\sum_{k=1}^{n}\binom{k-1}{2} = \binom{n}{3}$（從 n 件中選 3 件時，先固定最大的一件 k）一步便完成求和。每多一層「差的差」，二項式係數便升高一級，正如積分把冪次升高一次。

階乘數列

現在 $b_1 = 1$，而 p 和 e 如上所定，故 $b_k = 1 + (k-1)p + \frac{1}{2}(k-1)(k-2)e$。所以

$$b_2 = 1 + p, \qquad b_4 = 1 + 3p + 3e, \qquad b_6 = 1 + 5p + 10e.$$

在一個 $c_1 = b_2$、$c_2 = b_4$、$c_3 = b_6$、$c_4 = 220$ 的階乘數列（factorial progression）中，相鄰兩項之差依次為 $1!\,d$、$2!\,d$、$3!\,d$，即 d、$2d$、$6d$：

$$\begin{aligned} b_4 - b_2 &= 2p + 3e = d, \\ b_6 - b_4 &= 2p + 7e = 2d, \\ 220 - b_6 &= 219 - 5p - 10e = 6d. \end{aligned}$$

把第一式代入第二式，得 $2p+7e=4p+6e$，所以 $e=2p$，繼而 $d=8p$。第三條方程變成

$$219-5p-20p=48p \quad\Longrightarrow\quad 73p=219 \quad\Longrightarrow\quad p=3,$$

所以 $e=6$ 及 $d=24$，符合非零的要求。由於每一步都是必然的，這個解是唯一的。

於是 $b_k=1+3(k-1)+3(k-1)(k-2)=3k^2-6k+4$，得出數列 $1,4,13,28,49,76,\ldots$，而 $b_2,b_4,b_6,220=4,28,76,220$ 的差確實是 $24,48,144=1!\cdot 24,\ 2!\cdot 24,\ 3!\cdot 24$。

最後，把 $b_1=1$、$b_2-b_1=3$ 和 $b_3-2b_2+b_1=6$ 代入求和公式：

$$\begin{aligned}1+b_2+\cdots+b_n &= n+3\cdot\frac{n(n-1)}{2}+6\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\\ &= \frac{n}{2}[2+3(n-1)+2(n-1)(n-2)]\\ &= \frac{n(2n^2-3n+3)}{2}.\end{aligned}$$

驗算

當 $n=1,2,3$ 時，最後的公式給出 1、5 和 18，與 1、$1+4$ 和 $1+4+13$ 吻合。當 $n=6$ 時，公式給出 $3\cdot 57=171$，而直接計算亦得 $1+4+13+28+49+76=171$。此外，我們也用電腦以分數作精確運算，對數百個隨機數列及所有 $n\le 24$ 驗證了兩條一般求和公式。

常見錯誤

- 把階乘數列的差當作 $d,2d,3d$：它們其實是 $1!\,d$、$2!\,d$、$3!\,d$，所以第三個是 $6d$。
- 寫成 $b_k=b_1+kp+\ldots$：b_1 與 b_k 之間只有 $k-1$ 個差。

STEP 之外

這就是有限差分學（calculus of finite differences）：若一個數列的第 m 階差是常數，它便是 n 的 m 次多項式，而它的部分和則是 $m+1$ 次多項式，最宜用 $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\ldots$ 這組基來表示（牛頓（Newton）前向差分公式）。把 $\binom{n}{r}$ 求和而得 $\binom{n+1}{r+1}$，正是 $\int x^r\,\mathrm{d}x=\frac{x^{r+1}}{r+1}$ 的離散版本。想多做同類題目，可試試 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（進階數學難題集）中的問題。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。