詳細解答

STEP I 1990，第 3 題

純數學 • 法線與平行曲線

STEP I 1990，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s1-q3

關鍵思路

只要把向下的單位法向量（unit normal）明確寫出來，從而以 x 表示 $\mathbf{s}$ 的坐標，其餘一切便水到渠成。第 (i) 部分只需迫使 $\mathbf{s}$ 的 y 坐標等於零。在第 (ii) 部分，題目建議的代換（substitution）令 $\mathbf{s}$ 的坐標變得非常簡單，而斜率（gradient）條件則化為一條一階微分方程（first-order differential equation），這條方程原來恰好是一個全導數（exact derivative）。

解答

準備工作。曲線 $y = \mathrm{f}(x)$ 的切線（tangent）方向為 $(1, \mathrm{f}'(x))$，所以法向量為 $\pm(\mathrm{f}'(x), -1)$。向下的那一個的 y 分量為負，故

$$\mathbf{n} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \mathrm{f}'(x) \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad N = \sqrt{1 + \mathrm{f}'(x)^2},$$

因此

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} + \mathrm{p}(x)\mathbf{n} = \begin{pmatrix} x + \dfrac{\mathrm{p}(x)\,\mathrm{f}'(x)}{N} \\ \mathrm{f}(x) - \dfrac{\mathrm{p}(x)}{N} \end{pmatrix}.$$

另外留意，由於 $\mathbf{n}$ 是單位向量，所以 $|\mathbf{r} - \mathbf{s}| = |\mathrm{p}(x)|$。

第 (i) 部分

這裏 $\mathrm{f}(x) = x^k$，$\mathrm{f}'(x) = kx^{k-1}$，而 $N = \sqrt{1 + k^2 x^{2k-2}}$。要使 **s** 位於 x 軸上，它的 y 坐標必須為零：

$$x^k - \frac{\mathrm{p}(x)}{N} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{p}(x) = x^k \sqrt{1 + k^2 x^{2k-2}}.$$

這樣選取之後，**s** 的 x 坐標為

$$x + x^k \cdot kx^{k-1} = x + kx^{2k-1},$$

它是連續（continuous）而且遞增的，當 $x \to 0^+$ 時趨向 0，當 $x \to \infty$ 時趨向無窮大。所以 **s** 確實掃過整條正 x 軸，而不只是其中一部分。

現在 $|\mathbf{r}|^2 = x^2 + x^{2k}$，而 $|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 = \mathrm{p}(x)^2 = x^{2k} + k^2 x^{4k-2}$（這裏 $\mathrm{p} > 0$）。所以對每一個 $x > 0$ 都有 $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r} - \mathbf{s}|$，當且僅當

$$x^2 = k^2 x^{4k-2} \quad \text{對所有} x > 0.$$

取 $x = 1$ 便必有 $k^2 = 1$，所以 $k = 1$；反過來，$k = 1$ 時兩邊都等於 x^2。因此 $k = 1$。

從幾何角度看：在直線 $y = x$ 上，由 (x, x) 出發的向下法線與 x 軸相交於 $(2x, 0)$，而以 O、(x, x)、$(2x, 0)$ 為頂點的三角形是等腰三角形（isosceles triangle），兩條等邊的長度均為 $\sqrt{2}\,x$。

第 (ii) 部分

現在 $\mathrm{f}(x) = x^2$，$\mathrm{f}'(x) = 2x$，而 $N = \sqrt{1 + 4x^2}$。寫成 $\mathrm{p} = \mathrm{q}N$ 便可消去那些礙事的平方根：

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2x\,\mathrm{q}(x) \\ x^2 - \mathrm{q}(x) \end{pmatrix}.$$

新曲線是以 x 為參數（parameter）給出的，所以它在 **s** 的斜率為

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}X/\mathrm{d}x} = \frac{2x - \mathrm{q}'}{1 + 2\mathrm{q} + 2x\mathrm{q}'}.$$

令它等於 $2x$，即 $y = x^2$ 在 **r** 的斜率，然後兩邊乘以分母：

$$\begin{aligned} & 2x - \mathrm{q}' = 2x + 4x\mathrm{q} + 4x^2\mathrm{q}' \\ \Longleftrightarrow \quad & (1 + 4x^2)\,\mathrm{q}' + 4x\,\mathrm{q} = 0. \end{aligned}$$

> **想一想** 我們能否不除以 q（它可能在某處為零）而解出這條方程？

可以：改為除以 $N = \sqrt{1 + 4x^2}$，它永不為零。由於 $N' = 4x/N$，

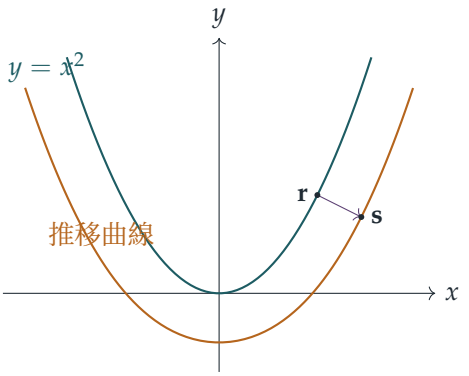
$$\frac{(1 + 4x^2)\,\mathrm{q}' + 4x\,\mathrm{q}}{N} = N\mathrm{q}' + \frac{4x}{N}\,\mathrm{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(N\mathrm{q}) = \mathrm{p}'(x).$$

所以條件其實就是對所有 x 都有 $\mathrm{p}'(x) = 0$，因此

$$\mathrm{p}(x) = c, \qquad \text{為一常數}$$

（等價地，$\mathrm{q}(x) = c/\sqrt{1+4x^2}$）。反過來，每一個常數 c 都可行，因為只要新曲線的斜率有定義，上述每一步都是可逆的。

新曲線是一條**平行曲線**（parallel curve）：拋物線（parabola）上每一點都沿着該點的法線被推移一段固定距離 c。下圖所示為 $c = \frac{1}{2}$ 的情況。



有一處細微之處：$\mathrm{d}X/\mathrm{d}x = 1 + 2\mathrm{q} + 2x\mathrm{q}'$，代入 $\mathrm{q} = c/N$ 後可化簡為 $1 + 2c/N^3$。當 $c > -\frac{1}{2}$ 時，它恆為正數，所以推移曲線是一條光滑曲線。若 $c \le -\frac{1}{2}$（即向上推移至少 $\frac{1}{2}$，亦即頂點處的曲率半徑（radius of curvature）），它會在 $N^3 = -2c$ 之處變為零，推移曲線便在該處出現尖點（cusp）。

驗算

- 在 (i) 中取 $k = 2$ 及 $x = 1$：$\mathrm{p}(1) = \sqrt{5}$，而 $\mathbf{s} = (1,1) + \sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1) = (3,0)$，一如所求位於 x 軸上；但 $|\mathbf{r}| = \sqrt{2} \neq \sqrt{5}$，所以 $k = 2$ 不符合要求。
- 在 (ii) 中，當 $x = 0$ 時，常數為 c 的推移曲線通過 $(0, -c)$，而根據對稱性，它在該處的斜率為 0，與拋物線頂點的斜率吻合。
- 以數值驗證，取 $c = 1$ 及 $x = 0.8$，用有限差分（finite difference）計算推移曲線的斜率，結果與 $2x = 1.6$ 相符；若改用非常數的 $\mathrm{p} = x^2$，得出的斜率則約為 0.41。

常見錯誤

- 誤用向上的法向量 $(-\mathrm{f}', 1)/N$：$\mathbf{s}$ 中的正負號會全部相反。

- 把新曲線的斜率寫成 $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x$，而不是 $(\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x)/(\mathrm{d}X/\mathrm{d}x)$；新曲線的 x 坐標是 X，而不是 x。
- 在 (i) 中，只比較指數（$4k-2=2$）便斷定 $k=1$，而沒有同時檢查係數 $k^2=1$。

STEP 之外

以固定距離推移而成的曲線稱為*平行曲線*或*偏移曲線*（offset curve），它們在實際應用中十分重要：銑牀（milling machine）刀具的中心，正是沿着所切削形狀的平行曲線移動。當偏移距離超過曲率半徑時出現的尖點，都位於*漸屈線*（evolute）之上，即曲率中心的軌跡（locus），它是曲線微分幾何（differential geometry）中的核心對象。Pressley 的 *Elementary Differential Geometry*（初等微分幾何）是一本很好的入門書。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。