詳細解答

STEP I 1990，第 16 題

概率與統計 • 三角分佈與假設檢驗

STEP I 1990，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s1-q16

關鍵思路

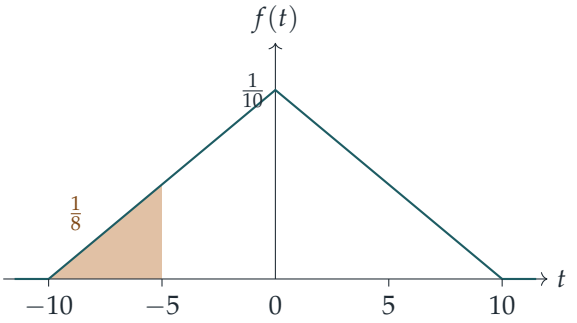
概率密度函數（probability density function）的圖像是一個三角形，所以我們需要的每一個概率都是某個小三角形的面積，而累積分佈函數（cumulative distribution function）會替我們完成所有工作。第二點要留意的是，只有 8 時的那班巴士才有可能在上午 8 時前後到站：7 時的那班巴士在 7.10 之前已經離開，而 9 時的那班巴士不可能在 8.50 之前到達。所以早上「趕上巴士」的真正意思是「比 8 時的那班巴士更早到站」。最後一部分於是變成一個只有一個參數的二項模型（binomial model）和一個顯著性檢定（significance test）。

解答

T 的密度函數

密度由 $t=-10$ 處的 0 線性上升至 $t=0$ 處的峯值，然後以相同的速率下降至 $t=10$ 處的 0，所以它在 $[-10,10]$ 上的形式是 $f(t)=k(10-|t|)$，在其他地方則為零。總面積等於一個底為 20、高為 $10k$ 的三角形的面積，所以 $\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 10k=1$，由此得 $k=\frac{1}{100}$：

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{10+t}{100}, & -10\le t\le 0,\\ \dfrac{10-t}{100}, & 0\le t\le 10,\\ 0, & \text{其他情況。}\end{cases}$$



為方便稍後使用，先求左半部分的累積分佈函數：它是一個底為 $a+10$、高為 $f(a)$ 的三角形的面積，

$$\mathrm{P}(T<a)=\tfrac{1}{2}(a+10)\cdot\frac{a+10}{100}=\frac{(a+10)^2}{200},\qquad -10\le a\le 0,$$

而根據關於 $t=0$ 的對稱性，當 $0\le a\le 10$ 時，$\mathrm{P}(T>a)=\dfrac{(10-a)^2}{200}$。圖中陰影部分的面積是 $\mathrm{P}(T<-5)=\frac{25}{200}=\frac{1}{8}$。

在上午 8.10 或之前趕上巴士

我們假設我會在車站一直等到有巴士來為止。預定 8 時到站的巴士在上午 8 時之後 T 分鐘到達，其中 $-10\le T\le 10$；上一班巴士在 7.10 之前已經離開，而下一班不可能在 8.50 之前到達。所以，我能在 8.10 或之前趕上巴士，當且僅當我比 8 時的那班巴士更早到達車站，而這時 8.10 的期限自然會得到滿足。

如果我在上午 8 時之後 a 分鐘到達車站，那麼當 $T>a$ 時我便能趕上這班車（恰好出現 $T=a$ 的機會為零）。三種情況分別給出

$$\begin{aligned}
7{\cdot}55,\ a=-5:&\quad \mathrm{P}(T>-5)=1-\tfrac{25}{200}=\tfrac{7}{8},\\
7{\cdot}58,\ a=-2:&\quad \mathrm{P}(T>-2)=1-\tfrac{64}{200}=\tfrac{17}{25},\\
8{\cdot}02,\ a=2:&\quad \mathrm{P}(T>2)=\tfrac{64}{200}=\tfrac{8}{25}.
\end{aligned}$$

我在 7.55 到達車站的概率是 0.5，在 7.58 到達的概率是 $0.5\times 0.8=0.4$，在 8.02 到達的概率是 $0.5\times 0.2=0.1$。我睡過頭與否和巴士毫無關係，所以根據全概率公式（law of total probability），

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\text{在 8.10 或之前趕上巴士})&=0.5\cdot\tfrac{7}{8}+0.4\cdot\tfrac{17}{25}+0.1\cdot\tfrac{8}{25}\\
&=0.4375+0.272+0.032=\frac{1483}{2000}=0.7415.
\end{aligned}$$

新時鐘是否不準？

首先假設時鐘是準確的，那麼我每天早上都在 7:55 到達車站。設 T_8 和 T_9 分別為 8 時和 9 時那兩班巴士的到站時間，以整點之後的分鐘數計算；它們互相獨立(independent)，各自的密度都是 f。我在上午 9 時之後仍在等車，當且僅當我錯過了 8 時的巴士（$T_8 < -5$）而且 9 時的巴士遲到（$T_9 > 0$）。所以在任何一個早上，

$$p = \mathrm{P}(T_8 < -5)\,\mathrm{P}(T_9 > 0) = \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{16}.$$

想一想 檢定應該朝哪個方向進行：5 次是「太多」還是「太少」？

時鐘調校錯誤，可以令 p 向任何一個方向偏移。假設時鐘快了 d 分鐘。那麼我到達車站的真實時間是 $7.55 - d$，而時鐘顯示 9.00 時的真實時間是 $9.00 - d$，所以等到「上午 9 時」之後的概率變成

$$g(d) = \mathrm{P}(T_8 < -5 - d)\,\mathrm{P}(T_9 > -d).$$

時鐘快了（$d > 0$）會令我更早到站，所以我很少會錯過 8 時的巴士，於是 $g(d) < \frac{1}{16}$；時鐘稍為慢了則會產生相反的效果（例如 $g(-2.5) \approx 0.079$）。所以，合理而不偏頗的做法是採用雙尾檢定（two-sided test）。

設 X 為這 100 個早上之中，按新時鐘計算我等到上午 9 時之後的早上數目。不同巴士的到站時間互相獨立，而我每天都在同一時間到站，所以各個早上是獨立試驗，並且

$$H_0:\ \text{時鐘準確},\quad X \sim \mathrm{B}(100, \tfrac{1}{16}); \qquad H_1:\ \text{時鐘調校錯誤，因此} p \neq \tfrac{1}{16}.$$

在 H_0 之下，我們預期有 $\mathrm{E}(X) = 6.25$ 次，而 $\mathrm{Var}(X) = 100 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{15}{16} \approx 5.86$，所以標準差（standard deviation）約為 2.42。觀察所得的 5 只是略低於平均值。準確地計算，

$$\mathrm{P}(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k} \approx 0.40 \qquad \text{其中} p = \tfrac{1}{16},$$

而採用連續性校正（continuity correction）的正態近似（normal approximation）則給出 $\Phi((5.5 - 6.25)/2.42) = \Phi(-0.31) \approx 0.38$。這與 0.025（5% 雙尾檢定的下尾）相去甚遠，事實上與任何常用的顯著性水平都相去甚遠。所以我們不拒絕 H_0：**沒有證據顯示新時鐘調校錯誤**。

這並不等於有證據顯示時鐘是準確的。事實上 $g(d) = g(-5 - d)$，因為密度是對稱的（把兩班巴士的角色對調即可），所以一個慢了 5 分鐘的時鐘所給出的 $p = \frac{1}{16}$，與準確的時鐘完全相同。這類數據無論收集多少個早上，都無法把這兩種情況區分開來。

驗算

- 密度的面積為 1，而三角形公式與對 f 作數值積分的結果吻合，例如 $\mathrm{P}(T < -2) = 0.32$。

- 答案 0.7415 介乎最好的情況 $\frac{7}{8}$（每次都在 7.55 到達）與最壞的情況 0.32（每次都在 8.02 到達）之間，這是理所當然的。模擬 10^6 個早上，所得結果為 0.741。
- 模擬 10^6 對 (T_8, T_9)，所得結果為 0.0622，對應 $\frac{1}{16} = 0.0625$；而準確的二項尾部概率 $\mathrm{P}(X \leq 5)$ 的數值為 0.4002。

常見錯誤

- 忘記了要等到 9 時之後，必須先錯過 8 時的巴士：答案 $p = \frac{1}{2}$（只考慮「9 時的巴士遲到」）忽略了第一個因子。
- 以為「在 8.10 或之前趕上巴士」需要另外檢查 $T \leq 10$：8 時的巴士必定在 8.10 或之前到達，所以只有 $T > a$ 才是關鍵。
- 數據顯示次數略為偏少，卻針對「太多」進行單尾檢定（one-tailed test）；時鐘不準可以令 p 向任何一個方向移動。

STEP 之外

三角形密度正是兩個獨立均勻隨機變量（uniform random variables）之和的分佈，這是卷積（convolution）的第一個例子，而大學一年級的概率課程正是用卷積來求和的密度。最後一部分讓我們淺嘗統計學上的可識別性（identifiability）：對稱性 $g(d) = g(-5 - d)$ 意味着兩個不同的參數值會產生完全相同的數據，所以沒有任何檢定能夠把它們區分開來。Grimmett 與 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率論入門）對卷積和隨機變量之和有清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。