詳細解答

STEP I 1990，第 13 題

力學 • 摩擦力與剛體平衡

STEP I 1990，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

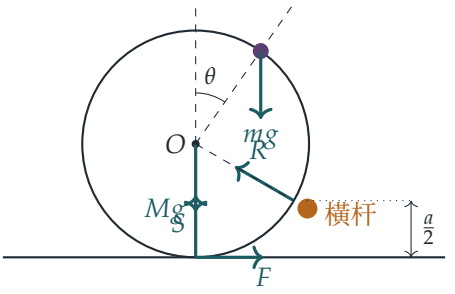
step.maths.org/questions/90-s1-q13

關鍵思路

先處理質點（particle）：它只是一個置於粗糙斜面上的普通質點，而該斜面就是圓柱體在接觸點處的切平面（tangent plane）。然後留意，由於質點處於平衡（equilibrium），它施於圓柱體的總力就只是它的重量，並且通過接觸點鉛垂向下作用。對圓柱體的中心取力矩（moments），除了這個力和來自平面的摩擦力（friction）之外，其餘各力全部消失，這是最快捷的入手方法。

解答

把質點視為質量為 m 的點質量，把圓柱體視為質量為 M 的均勻剛體（rigid body）圓柱，其質心（centre of mass）O 位於軸上。橫杆是光滑的，所以它只施加法向力；平面和圓柱體表面則是粗糙的，摩擦系數（coefficient of friction）為 μ。一切都發生在通過 O 的鉛垂橫截面內，以下我們只考慮這個截面。把橫杆放在右邊。



圖中顯示作用於圓柱體的各個力（質點位置的 mg 會在第二部分解釋）。箭咀並非按比例繪畫。

質點的平衡

在接觸點 P，向外的法線與向上的鉛垂線成 θ 角，所以該處的切平面是一個與水平成 θ 角的斜面。作用於質點的力有：它的重量 mg、沿向外法線方向的法向反作用力（normal reaction）N，以及沿切線、指向斜面上方的摩擦力 f。沿法線方向及垂直於法線方向分解，

$$N = mg\cos\theta, \qquad f = mg\sin\theta.$$

只要 $f \le \mu N$，摩擦力便足以提供這個力，即

$$\tan\theta \le \mu, \qquad \text{等價於} \qquad \theta \le \arctan\mu.$$

（我們需要 $0 \le \theta < 90^\circ$ 才能使 N 為正，而由於質點位於圓柱體的上半部，這是成立的。）

放手後圓柱體的平衡

> ? **想一想** 質點以一個法向力和一個摩擦力壓在圓柱體上。我們需要分開處理這兩個力嗎？

不需要。根據牛頓第三定律（Newton's third law），圓柱體在 P 點受到 $-N$ 和 $-f$。由於 N 與 f 合起來抵銷質點的重量，它們的和是鉛垂向上的 mg，所以質點施於圓柱體的總力是*鉛垂向下、作用於 P 點*的 mg。它的作用線與 O 的水平距離為 $a\sin\theta$，位於橫杆的一側。

作用於圓柱體的其他力有：

- 它的重量 Mg，作用於 O；
- 橫杆的反作用力 R，垂直於圓柱體表面，因此沿半徑指向 O。橫杆的接觸點高度為 $a/2$，即在 O 之下 $a/2$，所以這條半徑與向下的鉛垂線成 60°。因此 R 有一個背離橫杆的水平分量 $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ 和一個向上的分量 $\frac{1}{2}R$；
- 在最低點，有向上的法向反作用力 S 和水平方向的摩擦力 F（取其方向為指向橫杆）。

對 O 取力矩。Mg、R 和 S 的作用線全部通過 O。質點的 mg 的力矩為 $mg\,a\sin\theta$（使圓柱體轉向橫杆），而 F 作用於 O 之下距離 a 處，轉向相反。所以

$$Fa = mg\,a\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad F = mg\sin\theta.$$

這是正數，所以摩擦力確實如圖所示指向橫杆。（若沒有橫杆，圓柱體會向橫杆那一側滾動；這就是為甚麼質點必須在那一側，橫杆才會有用。）

水平方向分解：$\frac{\sqrt{3}}{2}R = F$，所以

$$R = \frac{2mg\sin\theta}{\sqrt{3}} > 0,$$

這與橫杆只能推而不能拉相符。

鉛垂方向分解：

$$S = (M+m)g - \tfrac{1}{2}R = (M+m)g - \frac{mg\sin\theta}{\sqrt{3}},$$

由於 $\sin\theta < 1 < \sqrt{3}$ 且 $M > 0$，這是正數，所以圓柱體不會離開平面。

只要 $F \le \mu S$，平面便能提供所需的摩擦力：

$$m\sin\theta \le \mu\left[(M+m) - \frac{m\sin\theta}{\sqrt{3}}\right] \iff m\sin\theta\left(\sqrt{3}+\mu\right) \le \sqrt{3}\,\mu\,(M+m).$$

所以，放手之後，只要 $\tan\theta \le \mu$ 與

$$\boxed{\sin\theta \le \frac{\sqrt{3}\,\mu\,(M+m)}{m\,(\sqrt{3}+\mu)}}$$

同時成立，兩個物體便能保持平衡。（光滑的橫杆處不需要摩擦力，而質點與圓柱體之間的摩擦力已在第一部分處理。）

最後部分

當 $m = 7M$ 及 $\mu = \frac{3}{4}$ 時，質點的條件是 $\tan\theta \le \frac{3}{4}$，即 $\sin\theta \le \frac{3}{5}$。圓柱體的條件是

$$\sin\theta \le \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot 8M}{7M\,(\sqrt{3}+\frac{3}{4})} = \frac{24\sqrt{3}}{7(4\sqrt{3}+3)} = \frac{24\sqrt{3}\,(4\sqrt{3}-3)}{7\cdot 39} = \frac{24(4-\sqrt{3})}{91}.$$

哪一個較嚴格？我們有

$$\frac{24(4-\sqrt{3})}{91} < \frac{3}{5} \iff 120(4-\sqrt{3}) < 273 \iff 207 < 120\sqrt{3} \iff 42849 < 43200,$$

這是成立的。所以圓柱體在平面上滑動才是真正起限制作用的條件（僅僅如此），而能保持平衡的最大 θ 值是

$$\theta_{\max} = \arcsin\frac{24(4-\sqrt{3})}{91} \approx 36.7^\circ,$$

僅略小於 $\arctan\frac{3}{4} \approx 36.9^\circ$。

驗算

- 極限情況 $M \to \infty$：圓柱體的條件變得形同虛設，因為非常重的圓柱體總能靠摩擦力固定；只剩下 $\tan\theta \le \mu$。
- 當 $\theta \to 0$ 時，質點位於頂部，它的重量通過 O，而 $F = R = 0$：正如所料，不需要橫杆或摩擦力。

- 數值上，隨機選取 20 000 組 M, m, a, μ, θ，直接由原始的力向量解出三條平衡方程，結果每次都與方框內的條件吻合；當 $m = 7M$、$\mu = 0.75$ 時，對 θ 作精細掃描，得到 $\theta_{\max} \approx 36.737^\circ$，而 $\sin\theta_{\max} \approx 0.59814$。

常見錯誤

- 把橫杆的力當作水平方向。它垂直於圓柱體表面，所以沿半徑方向，在這裏是與水平成 30° 向上。
- 忘記橫杆的力有向上的分量 $\frac{1}{2}R$，它會減小 S，從而減小平面所能提供的摩擦力。
- 做到 $\theta = \arctan\frac{3}{4}$ 便停下來，沒有與圓柱體的條件比較，而後者（稍為）更嚴格。

STEP 之外

這裏用到的技巧，是把質點的接觸力換成一個等於其重量的合力（resultant）。由此可以初步窺見一個想法：作用於剛體的任何力系，都可以化簡為通過某個選定點的單一力再加上一個力偶（couple）。具有多個摩擦接觸點的剛體靜力學（statics）是大學一年級的標準課題，而「哪一個接觸點先滑動」這個問題，會引申到更微妙的情況：摩擦力並不能單靠方程確定。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）對力、力矩和剛體平衡有嚴謹的論述。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。