詳細解答

STEP I 1990，第 12 題

力學 • 彈簧與能量

STEP I 1990，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

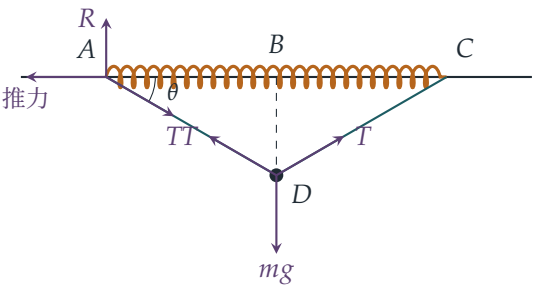
step.maths.org/questions/90-s1-q12

關鍵思路

這裏除了質點之外，所有物件都是輕的，所以兩端 A 和 C 所受的力必須完全平衡：繩子對每一端的水平拉力，等於被壓縮的彈簧的推力。這就給出平衡條件。至於運動，能量是最自然的工具：唯一的動能是質點的動能，所以質點靜止的時刻，正正就是勢能（potential energy）回到初始值的時刻。

解答

模型。彈簧和繩子都是輕的，繩子不可伸長（inextensible），而桿是光滑的，所以桿只能沿垂直方向推彈簧。由於整個系統關於通過 B 的垂直線對稱，質點 D 一直位於 B 的正下方，且 $AD = DC = l$。設 T 為每半段繩子的張力（tension），θ 為每半段繩子與桿所成的角。



平衡

當 $\theta = \pi/6$ 時，AC 的一半長度是 $l\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}l$，所以

$$AC = \sqrt{3}\,l < 2l,$$

彈簧被壓縮了 $(2-\sqrt{3})l$。根據虎克定律（Hooke's law），它對 A（以及對 C）施加向外的推力（thrust）

$$\frac{\lambda(2-\sqrt{3})l}{2l} = \lambda\Big(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

在 D 沿垂直方向分解力：$2T\sin\frac{\pi}{6} = mg$，所以 $T = mg$。

在 A 沿水平方向分解力：

想一想 A 處明明甚麼也沒有，為甚麼可以在那裏列出力的平衡？

彈簧的末端是一個輕的點：質量為零的物體若受到任何淨力，加速度便會是無限大，所以它所受的力必須在每一刻都平衡（而不僅是在平衡狀態下）。桿是光滑的，所以它的反作用力（reaction）R 是垂直的，水平方向就只有繩子和彈簧在起作用：

$$T\cos\frac{\pi}{6} = \lambda\Big(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad\Longrightarrow\quad mg\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \lambda\,\frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

所以

$$mg = \lambda\,\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \lambda\Big(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\Big),$$

這正是所要證明的結果。

勢能

設 $AC = 2xl$，則繩子拉緊時 $0 < x \le 1$。AC 的一半是 xl，而 $AD = l$，所以由畢氏定理（Pythagoras' theorem），D 在桿下方的深度為

$$BD = l\sqrt{1-x^2}$$

。彈簧的伸長量是 $2xl - 2l$，所以它的彈性勢能(elastic energy)是 $\frac{\lambda(2l-2xl)^2}{2\cdot 2l} = \lambda l(1-x)^2$。取桿為重力勢能（gravitational potential energy）的零位，

$$V(x) = \lambda l(1-x)^2 - mgl\sqrt{1-x^2}.$$

作為一致性的檢查，

$$V'(x) = -2\lambda l(1-x) + \frac{mglx}{\sqrt{1-x^2}},$$

而在 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 處（這時 $\cos\theta = x$，所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$），上式為零的充要條件正是 $mg\sqrt{3} = \lambda(2-\sqrt{3})$，也就是我們在上面求得的條件。

從 B 落下

起初質點位於 B，所以繩子沿着桿平放，$AC = 2l$ 而 $x = 1$。於是 $V(1) = 0$，系統由靜止開始運動。

桿是光滑的，繩子不可伸長，所以沒有能量損失；又因為彈簧和繩子都是輕的，唯一的動能（kinetic energy）就是質點的 $\frac{1}{2}mv^2$。因此在整個運動過程中

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + V(x) = V(1) = 0.$$

想一想 為甚麼「靜止下來」的意思是 $V(x) = 0$，而不是 $V'(x) = 0$？

質點靜止時 $v = 0$，根據能量守恆（energy conservation），這表示 $V(x) = 0$。條件 $V'(x) = 0$ 描述的是平衡位置，那是質點運動得最快的地方，而不是它停下來的地方。所以 x 滿足

$$\lambda(1-x)^2 = mg\sqrt{1-x^2}, \qquad \text{即} \qquad (1-x)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\sqrt{1-x^2}.$$

根 $x = 1$ 是起始位置。對於 $x < 1$，我們可以把兩邊除以 $\sqrt{1-x} > 0$ 再平方，得到一個較簡潔的三次方程（cubic）：

$$(1-x)^3 = k^2(1+x), \qquad k = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \approx 0.15470, \quad k^2 \approx 0.023932.$$

這裏平方是穩妥的，因為 $(1-x)^{3/2} = k\sqrt{1+x}$ 的兩邊都是正數。設 $f(x) = (1-x)^3 - k^2(1+x)$。則

$$f(0.65) = 0.042875 - 0.039488 \approx +0.0034,$$
$$f(0.66) = 0.039304 - 0.039727 \approx -0.0004,$$

所以在 0.65 與 0.66 之間有一個根，而且非常接近 0.66。由於 $f'(x) = -3(1-x)^2 - k^2 < 0$，$f$ 是嚴格遞減（strictly decreasing）的，所以這是唯一滿足 $x < 1$ 的根。質點下一次靜止時 $x \approx 0.66$（更精確地說 $x \approx 0.6589$），這時 D 在桿下方的深度約為 $0.75l$。

驗算

- 在 $\theta = \pi/6$ 處，取 $\lambda = l = m = 1$ 及 $g = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1$，$A$ 處的水平拉力和彈簧的推力都等於 0.13397，而 V 在 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 處的數值導數為零（且 $V'' > 0$，所以這個平衡是穩定的）。
- 用二分法（bisection）求得根 $x = 0.658861$；另外，就 D 的深度 y，由靜止於 $y = 0$ 開始，以 RK4 逐步計算運動方程 $m\ddot{y} = mg - 2\lambda(1-x)\,y/(lx)$，結果顯示質點首次停下時 $x = 0.658861$，兩者吻合。

- 平衡時的值 $x = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$ 位於 0.66 與 1 之間，這是必然的：質點圍繞平衡位置振盪。

常見錯誤

- 以為彈簧是被拉長的。這裏 $AC < 2l$，所以彈簧是被壓縮的，它把 A 和 C 向外推開。
- 以 $V'(x) = 0$ 來求靜止位置。這樣求得的是平衡位置，那裏速率最大。
- 忘記了重力勢能在桿的下方是負的，結果得出一條在 $(0, 1)$ 內無解的能量方程。

STEP 之外

「無質量的物體所受的淨力必為零」這個想法是一個約束（constraint），而不是一條運動定律。這類問題用拉格朗日力學（Lagrangian mechanics）處理最為乾淨利落：你只需用單一個坐標（這裏是 x）寫下一個能量函數，約束力根本不會出現。勢能 $V(x)$ 還可以透過 V'' 給出圍繞平衡位置的小振盪（small oscillations）的週期。Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學導論）正是以這種精神講解能量方法和小振盪。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。