詳細解答

STEP I 1990，第 11 題

力學 • 拋體與動量

STEP I 1990，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s1-q11

關鍵思路

整個過程分為三個階段：先是普通的拋體（projectile）運動，直至飛行的最高點；然後是一次瞬時碰撞（接住炮彈）；最後是一次瞬時「爆炸」（推開炮彈）。在兩個瞬時階段中，重力來不及起作用，所以炮彈與超人組成的系統動量守恆（conservation of momentum），而且在每個方向上各自守恆。此後炮彈再次成為拋體，從已知的高度以已知的向下速率出發。

解答

我們把炮彈和超人都視為質點（particle），忽略空氣阻力，並假設炮彈從水平地面發射，最後亦落在水平地面上。取 x 為沿運動方向的水平方向，y 為垂直向上。

直至飛行的最高點

炮彈初速度的分量為

$$u_x = v\cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}v, \qquad u_y = v\sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}v.$$

在最高點，垂直速度為零，所以所需時間和到達的高度分別是

$$t_1 = \frac{u_y}{g} = \frac{\sqrt{3}\,v}{2g}, \qquad H = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{3v^2}{8g}.$$

此刻炮彈正以速率 $\frac{1}{2}v$ 水平運動。

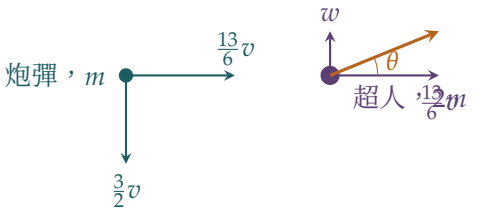
接住炮彈

超人以 $3v$ 的速率水平飛行，從後方接住炮彈，然後兩者一起運動。在（瞬時的）接住過程中水平動量守恆，所以若 V 是兩者的共同速率，則

$$2m(3v) + m\left(\tfrac{1}{2}v\right) = 3mV \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{13v}{6}.$$

此刻兩者都沒有垂直速度，所以合起來的垂直動量為零。

推開炮彈



超人現在把炮彈垂直向下推。這一推是內部衝量（impulse），所以兩者的總動量在兩個方向上都保持不變。

水平方向：炮彈保持水平速率 $\frac{13}{6}v$。總水平動量仍然是 $3m \cdot \frac{13}{6}v$，所以超人的水平速率同樣保持為 $\frac{13}{6}v$。（這並不意外：衝量是垂直方向的。）

垂直方向：總垂直動量原本為零，所以若超人以速率 w 向上運動，則

$$2m\,w - m\left(\tfrac{3}{2}v\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad w = \tfrac{3}{4}v.$$

想一想 重力自始至終都在作用，為甚麼我們仍然可以使用動量守恆？

接住和推開都是瞬時發生的。重力是有限的力，所以在長度為零的時間區間內，它的衝量為零；真正起作用的只有超人與炮彈之間巨大而短暫的內力，而這些內力成對地互相抵消。

炮彈餘下的飛行

炮彈現在從高度 $H = \frac{3v^2}{8g}$ 出發，垂直向下的速率為 $\frac{3}{2}v$。取 s 以向下為正，炮彈經過時間 t_2 後到達地面，其中

$$\tfrac{3}{2}v\,t_2 + \tfrac{1}{2}gt_2^2 = \frac{3v^2}{8g}.$$

兩邊乘以 $8g$，得到一個關於 gt_2 的二次方程：

$$4(gt_2)^2 + 12v(gt_2) - 3v^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad gt_2 = \frac{-12v + \sqrt{144v^2 + 48v^2}}{8} = \frac{-12 + 8\sqrt{3}}{8}\,v,$$

由於 $t_2 > 0$，這裏取正根。所以

$$t_2 = \left(\sqrt{3} - \tfrac{3}{2}\right)\frac{v}{g}.$$

（這是正數，因為 $\sqrt{3} \approx 1.732 > 1.5$。）總飛行時間為

$$\begin{aligned} T = t_1 + t_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v}{g} + \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\frac{v}{g} \\ &= \frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}\frac{v}{g} \;\approx\; 1.10\,\frac{v}{g}. \end{aligned}$$

超人的運動方向

緊接推開炮彈之後，超人的速度分量為水平方向 $\frac{13}{6}v$ 和向上 $\frac{3}{4}v$。因此他的軌跡起初與水平成仰角 θ，其中

$$\tan\theta = \frac{\frac{3}{4}v}{\frac{13}{6}v} = \frac{9}{26}, \qquad \theta = \arctan\frac{9}{26} \approx 19.09^\circ,$$

所以該角準確至最接近的度數是 19°。

驗算

- 若沒有超人，炮彈會在時間 $2t_1 = \sqrt{3}\,v/g \approx 1.73\,v/g$ 落地。把炮彈向下推理應縮短飛行時間，而 $T \approx 1.10\,v/g$ 的確較小。
- 質量比：炮彈的質量是超人的一半，所以它得到的垂直速率應是超人的兩倍，方向相反。事實正是如此：$\frac{3}{2}v = 2 \times \frac{3}{4}v$。
- 數值驗證：取 $v = 13.7$ 和 $g = 9.81$，以 10^{-6} 為步長逐步計算炮彈從高度 H 下落的過程，得 $t_2 \approx 0.32407\,\mathrm{s}$，與 $(\sqrt{3} - \frac{3}{2})v/g$ 吻合，而 $T \approx 1.5335\,\mathrm{s} = 1.0981\,v/g$。

常見錯誤

- 忘記了接住炮彈這一步：推開之後沒有使用共同速率 $\frac{13}{6}v$，而是用了炮彈本身的水平速率 $\frac{1}{2}v$，或超人的 $3v$。
- 忽略質量，以為超人向上的速率是 $\frac{3}{2}v$。
- 取了二次方程的負根，或把 t_2 加到 $2t_1$ 而不是 t_1 上。

STEP 之外

接住炮彈是一次完全非彈性碰撞（perfectly inelastic collision），而推開炮彈則是它的逆過程，即一次爆炸：同一條守恆定律在兩個方向上都適用，只是動能（kinetic energy）在前者中損失，在後者中得到補充。在大學一年級的課程中，這會發展成衝力（impulsive force）和系統質心（centre of mass）的一般理論：無論系統各部分之間互相推撞得多麼猛烈，質心的運動只取決於外力。Kleppner 與 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門）正是本着這種精神處理動量、衝量和質心。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。