詳細解答

STEP I 1990，第 10 題

力學 • 功率與阻力

STEP I 1990，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s1-q10

關鍵思路

「穩定速率」（steady speed）即是沒有加速度，所以跑手的驅動力（driving force）恰好與各阻力平衡，而功率（power）等於驅動力乘以速率。唯一要留神的地方，是空氣阻力（air resistance）取決於相對於空氣的速率，而這個速率在去程和回程並不相同。至於題目的後半部分，應該考慮總能量（energy）而不是功率：每一程所消耗的能量等於阻力乘以距離，於是固定的能量預算就化為兩個速率之間的一個線性條件。

解答

穩定速率與完成賽事的時間

把跑手看成沿直線運動的質點（particle）。設 v（單位為 $\mathrm{m\,s^{-1}}$）為跑手在某一程的對地速率，D（單位為 N）為跑手產生的向前驅動力。阻力分別為 $50\,\mathrm{N}$ 和 $2w\,\mathrm{N}$，兩者分別阻礙相對於地面和相對於空氣的運動。



沿跑道方向分解各力，由於以穩定步速前進時加速度為零，所以

$$D = 50 + 2w.$$

跑手作功的速率等於驅動力乘以其作用點的速率，所以 $300 = Dv$。

去程。風以 $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 的速率順着跑手的運動方向吹。若 $v > 3$，跑手相對於空氣以 $w = v - 3$ 向前運動，空氣阻力向後作用。（下文會驗證 $v > 3$。）於是 $D = 50 + 2(v-3) =$

$44+2v$，而

$$v_1(44+2v_1)=300 \iff v_1^2+22v_1-150=0 \iff v_1=-11+\sqrt{271}\approx 5.462,$$

這裏取正根。這個值確實大於 3，所以假設成立。（另一個看法：當 $v=3$ 時沒有空氣阻力，所需功率只是 $3\times 50=150<300\,\mathrm{W}$，所以跑手必定跑得比風快。）

回程。這時跑手逆風而跑，所以 $w=v+3$，而 $D=50+2(v+3)=56+2v$：

$$v_2(56+2v_2)=300 \iff v_2^2+28v_2-150=0 \iff v_2=-14+\sqrt{346}\approx 4.601.$$

時間。忽略起跑和折返時的加速過程，

$$T_0=\frac{5000}{v_1}+\frac{5000}{v_2}\approx 915.4+1086.7=2002.1,$$

所以完成賽事需時 2002 s（準確至最接近的秒），即大約 33 分 22 秒。

另一種策略

現在假設跑手去程以 $x_1\,\mathrm{W}$、回程以 $x_2\,\mathrm{W}$ 的功率作功，穩定速率分別為 v_1 和 v_2。力的平衡關係不變，所以只要 $v_1>3$，

$$x_1=v_1(44+2v_1), \qquad x_2=v_2(56+2v_2).$$

去程所需時間為 $5000/v_1$，所以去程消耗的能量為

$$x_1\cdot\frac{5000}{v_1}=5000(44+2v_1),$$

這正好是阻力乘以距離，理應如此。同樣地，回程消耗 $5000(56+2v_2)$。因此總能量為

$$E=5000(100+2(v_1+v_2)).$$

想一想 固定的總能量在哪裏派上用場？

跑手消耗的總能量必須與原來的賽事相同，所以 E 是一個固定的數。由於 E 只透過 v_1+v_2 取決於兩個速率，這個和就被確定了：

$$v_1+v_2=\frac{E}{10\,000}-50,$$

無論 x_1 和 x_2 怎樣選取都是如此。這就證明了所求結果。它的值就是原來賽事中的值，

$$S=v_1+v_2=\sqrt{271}+\sqrt{346}-25\approx 10.063.$$

最佳策略。現在完成賽事的時間為

$$T=5000\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)=\frac{5000\,(v_1+v_2)}{v_1v_2}=\frac{5000\,S}{v_1v_2}.$$

由於 S 固定，當 $v_1 v_2$ 最大時這個時間最小。根據算術—幾何平均不等式（AM–GM inequality），$v_1 v_2 \le (\frac{S}{2})^2$，等號恰好在 $v_1 = v_2 = \frac{S}{2}$ 時成立。所以最佳方案是來回都以相同的速率跑，即 $\frac{S}{2} \approx 5.032\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。這仍然比風快，所以去程中 x_1 的公式依然有效。最短時間為

$$T_{\min} = \frac{5000\,S}{S^2/4} = \frac{20\,000}{S} \approx 1987.4\ \mathrm{s}.$$

跑手節省了 $T_0 - T_{\min} \approx 2002.1 - 1987.4 = 14.7\,\mathrm{s}$，即大約 15 秒，正如題目所求。所用功率約為去程 $x_1 \approx 272\,\mathrm{W}$、回程 $x_2 \approx 332\,\mathrm{W}$：跑手在順風時放鬆一點，逆風時則加把勁。

驗算

- 能量是否一致：$300 \times 2002.105 \approx 600\,632\,\mathrm{J}$，而 $5000(100 + 2 \times 10.0632) \approx 600\,632\,\mathrm{J}$ 亦然。
- 若沒有風，兩程都會得出 $v^2 + 25v - 150 = 0$，所以 $v = 5$，兩種方法就會完全一致。正是有風，才有可能節省時間。
- 我們以數值方法驗證過：隨機選取 1000 個 x_1 的值（x_2 由能量預算確定），都有 $v_1 + v_2 = 10.0632$；沒有任何選擇能快過 1987.4 s；節省的時間為 14.66 s。

常見錯誤

- 在空氣阻力一項中用了對地速率，而不是相對於空氣的速率；又或者在其中一程把風的正負號弄反了。
- 以為來回用相同的*功率*才算合理：其實是來回用相同的*速率*才令時間最短。
- 試圖單憑功率方程證明 $v_1 + v_2$ 為常數。你需要用到總能量固定這個條件。

STEP 之外

最後一部分是一個小型的約束優化（constrained optimisation）問題：在一個線性約束條件下，求 $1/v_1 + 1/v_2$ 的最小值。這裏用 AM–GM 不等式就能解決，但一般的工具是大學一年級課程會學到的拉格朗日乘數法（method of Lagrange multipliers），而同樣的想法也支配着單車和賽艇運動中的最佳配速。若想看對功、功率和阻力的嚴謹論述，可參閱 Kleppner 與 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力學入門教科書）。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。