詳細解答

STEP I 1990，第 1 題

純數學 • 三角函數的最優化

> **STEP I 1990，第 1 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q1

關鍵思路

窗簾的每個頂點與圓心 D 的距離都是 r，所以半徑 DX 和 DY 把這個四邊形分成三個以 D 為頂點的等腰三角形（isosceles triangle）。每個三角形的面積都是 $\frac{1}{2}r^2\sin(\text{頂角})$，而三個頂角之和為 π。這樣，一道幾何題就變成求幾個正弦之和的最大值，而第一部分只需用和化積公式（sum-to-product formula）便可完成，完全不必動用微積分。

解答

窗簾的面積

由於 A、D、C 共線（collinear），在 D 處的各角滿足

$$\angle ADX + \angle XDY + \angle YDC = \pi, \qquad \text{所以} \qquad \angle YDC = \pi - \theta - \alpha.$$

這裏 $\theta \geq 0$、$\alpha > 0$ 且 $\theta + \alpha \leq \pi$，使得 X 和 Y 在弧上按 A, X, Y, C 的次序排列。

半徑 DX 和 DY 把窗簾 $AXYC$ 分成三角形 ADX、XDY 和 YDC，每個三角形都有兩條長度為 r 的邊相交於 D。對每個三角形使用面積 $= \frac{1}{2}ab\sin C$，得

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \tfrac{1}{2}r^2\sin\theta + \tfrac{1}{2}r^2\sin\alpha + \tfrac{1}{2}r^2\sin(\pi - \theta - \alpha) \\ &= \tfrac{1}{2}r^2[\sin\alpha + \sin\theta + \sin(\theta + \alpha)], \end{aligned}$$

因為 $\sin(\pi - u) = \sin u$。

固定 α 時的最佳 θ

當 α 固定時，只有 $\sin\theta + \sin(\theta+\alpha)$ 會變動。根據和化積公式 $\sin P + \sin Q = 2\sin\frac{P+Q}{2}\cos\frac{P-Q}{2}$，

$$\sin\theta + \sin(\theta+\alpha) = 2\cos\tfrac{\alpha}{2}\,\sin\!\left(\theta+\tfrac{\alpha}{2}\right).$$

> **想一想** 為甚麼這樣一寫，最大值就一目了然？

因子 $2\cos\frac{\alpha}{2}$ 是一個固定的正常數，因為 $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$。所以面積最大，恰好就是 $\sin(\theta+\frac{\alpha}{2})$ 最大的時候。當 θ 取遍 $[0,\pi-\alpha]$ 時，角 $\theta+\frac{\alpha}{2}$ 取遍 $[\frac{\alpha}{2},\pi-\frac{\alpha}{2}]$，而這個區間包含 $\frac{\pi}{2}$。因此正弦可以達到它的最大可能值 1，此時 $\theta+\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}$，即

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}.}$$

這時同樣有 $\angle YDC = \pi-\theta-\alpha = \frac{\pi-\alpha}{2} = \theta$：最佳的窗簾關於垂直的半徑對稱，與直覺相符。對這個 α 而言，最大面積是

$$\tfrac{1}{2}r^2\left[\sin\alpha + 2\cos\tfrac{\alpha}{2}\right].$$

讓 α 變動

現在我們要在 $0<\alpha<\pi$ 的範圍內求 $f(\alpha)=\sin\alpha+2\cos\frac{\alpha}{2}$ 的最大值。（對每個 α，最大面積是 $\frac{1}{2}r^2 f(\alpha)$，所以整體的最大面積就是 $\frac{1}{2}r^2$ 乘以 f 的最大值。）求導數（differentiate），得

$$f'(\alpha) = \cos\alpha - \sin\tfrac{\alpha}{2}.$$

設 $s=\sin\frac{\alpha}{2}$，於是 $0<s<1$，再利用 $\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$：

$$f'(\alpha) = 1 - s - 2s^2 = (1-2s)(1+s).$$

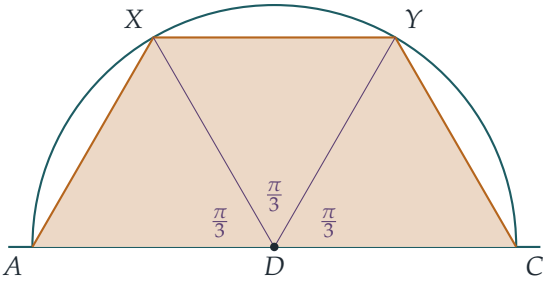
由於 $1+s>0$，f' 的正負號與 $1-2s$ 相同。因為 s 在 $(0,\pi)$ 上隨 α 遞增，f' 在 $s<\frac{1}{2}$ 時為正，在 $s>\frac{1}{2}$ 時為負。所以 f 先遞增後遞減，並在 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ 處取得最大值，即 $\alpha=\frac{\pi}{3}$。在該處

$$f\!\left(\tfrac{\pi}{3}\right) = \sin\tfrac{\pi}{3} + 2\cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \tfrac{3\sqrt{3}}{2},$$

所以窗簾的最大可能面積是

$$\boxed{\tfrac{1}{2}r^2\cdot\tfrac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2.}$$

此時 $\alpha=\theta=\angle YDC=\frac{\pi}{3}$，所以三個三角形都是等邊三角形，而窗簾正是內接（inscribed）於整個圓的正六邊形（regular hexagon）的一半。



驗算

- 極限情況：當 $\alpha \to 0$ 時，窗簾變成三角形 AXC，其中 X 位於最高點，面積為 $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = r^2$，而確實有 $\frac{1}{2}r^2 f(0) = r^2$。當 $\alpha \to \pi$ 時，窗簾塌縮到直徑上，而 $f(\pi) = 0$。最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2 \approx 1.299r^2$ 比兩者都大，同時小於半圓的面積 $\frac{\pi}{2}r^2 \approx 1.571r^2$，這是必然的。
- 數值驗證：我們隨機選取 X 和 Y 的位置，把三個三角形的面積公式與鞋帶公式（shoelace formula）互相核對；又對若干個 α 的值，用細密的網格搜尋找出最佳的 θ；並發現取 $r = 1$ 時，對 θ 和 α 同時搜尋所得的最大面積為 $1.299038\ldots = \frac{3\sqrt{3}}{4}$。

常見錯誤

- 遺漏第三個三角形 YDC，或者把它的角寫成 $\pi - \alpha$ 而不是 $\pi - \theta - \alpha$。
- 在第二部分直接取 $\theta = \alpha = \frac{\pi}{3}$ 這條捷徑，卻沒有給出理由。必須用微積分（或對稱性的論證）才能證明最佳的窗簾確實是正六邊形的一半。

STEP 之外

這個答案是一個經典結果的特殊情況：在內接於同一個圓的所有 n 邊形之中，以正多邊形的面積最大。有一個簡潔的證明，用到 sin 在 $[0, \pi]$ 上的凹性（concavity）和琴生不等式（Jensen's inequality）：若圓心角（central angle）$\phi_1, \ldots, \phi_n$ 之和為 2π，則 $\sum \sin \phi_i \leq n \sin \frac{2\pi}{n}$。我們的窗簾就是 $n = 6$ 這個情況的一半。凸性（convexity）和這類不等式是大學一年級分析（analysis）課程中貫穿始終的主題；Abbott 的 *Understanding Analysis* 是正式認識這些概念的好起點，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 則收錄了更多同類風格的 STEP 題目。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。