詳細解答

STEP III 1989，第 9 題

純數學 • 冪級數求和

> **STEP III 1989，第 9 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q9

關鍵思路

每個級數(series)都是一個熟悉的冪級數(power series)$\sum a_r x^r$ 在某個特定的 x 處的取值，所以要做的就是認出它是哪一個。幾何級數（geometric series）$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ 是頭兩個級數的源頭。對它求導，會帶出一個因子 r；對它積分，則會除以 r。至於第三個，奇數的連乘積除以階乘，正是指數為負分數的二項展開式（binomial expansion）所產生的形式。

解答

以下我們一直會用到：當 $|x| < 1$ 時，

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty} x^{r-1}.$$

題目說明不必理會收斂（convergence）的問題，所以我們可以放心逐項求導、逐項積分。(我們用到的三個 x 值全都穩穩落在收斂區間（interval of convergence）之內，所以這樣做其實是合理的。)

第 (i) 部分

通項是 $r\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$，所以我們要求的是 $\sum rx^{r-1}$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 處的值。把幾何級數逐項求導，

$$\sum_{r=1}^{\infty} rx^{r-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

代入 $x = \frac{1}{2}$：

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

第 (ii) 部分

通項是 $\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}$。求導可以抵銷除以 r 這一步，所以這次我們改為積分。把幾何級數由 0 積分至 x，

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{x^r}{r} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = -\ln(1-x).$$

這裏的冪次高了一次，所以我們除以 x（其中 $x \neq 0$）：

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} x^{r-1} = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

代入 $x = \frac{1}{2}$：

$$1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2^2} + \cdots = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2\ln 2.$$

第 (iii) 部分

設

$$c_k = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{k!}, \qquad c_0 = 1.$$

? **想一想** 你以前在哪裏見過奇數的連乘積除以 $k!$？

就在 $(1+y)^{-1/2}$ 的二項展開式裏。y^k 的係數是

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1)}{k!} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_k.$$

因此，取 $y = -2x$，正負號和 2 的冪便互相抵銷：

$$(1-2x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-2x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 1 + x + \frac{1 \times 3}{2!}x^2 + \frac{1 \times 3 \times 5}{3!}x^3 + \cdots,$$

此式在 $|2x| < 1$ 時成立。

現在仔細看看題目給出的級數。它的通項是 $c_k \cdot \frac{1}{3^{k-1}} = 3c_k\left(\frac{1}{3}\right)^k$，而且由 $k = 2$ 開始（首項是 $\frac{1\times3}{2!} \times \frac{1}{3}$）。所以它等於上面的級數在 $x = \frac{1}{3}$ 處的值，去掉 $k = 0$ 和 $k = 1$ 兩項之後，

再乘以 3：

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{\infty} c_k \frac{1}{3^{k-1}} &= 3\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\tfrac{1}{3}\right)^k - c_0 - c_1 \cdot \tfrac{1}{3}\right)\\ &= 3\left(\left(1-\tfrac{2}{3}\right)^{-1/2} - 1 - \tfrac{1}{3}\right)\\ &= 3\left(\sqrt{3} - \tfrac{4}{3}\right)\\ &= 3\sqrt{3} - 4.\end{aligned}$$

這裏 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2} = \sqrt{3}$，而 $x = \frac{1}{3}$ 滿足 $|2x| < 1$。

驗算

- 第 (i) 部分：部分和（partial sums）1, 2, 2.75, 3.25, 3.5625, … 逐步向 4 靠近，而把 200 項加起來，在機器精度之內得到 4。
- 第 (ii) 部分：$2\ln 2 \approx 1.3863$，而部分和 1, 1.25, 1.3333, 1.3646, … 與此吻合。
- 第 (iii) 部分：各項為 0.5, 0.2778, 0.1620, …，把 400 項加起來得到 1.196152…，與 $3\sqrt{3} - 4 \approx 1.1962$ 相符。再做一個簡單的合理性檢查：答案必須大於首項 0.5，而且是正數；這就排除了忘記去掉 $k = 1$ 一項的情況（那樣會得到 $3\sqrt{3} - 3 \approx 2.196$，由於各項大致按幾何級數遞減，這個值太大了）。

常見錯誤

- 在 (ii) 中，忘記除以 x：$-\ln(1-x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 處的值是 $\ln 2$，只有答案的一半。
- 在 (iii) 中，沒有留意到級數由 $k = 2$ 開始，或者漏掉了由 $\frac{1}{3^{k-1}} = 3 \cdot \frac{1}{3^k}$ 而來的額外因子 3。

STEP 之外

冪級數在其收斂半徑（radius of convergence）之內可以逐項求導和逐項積分，原因是冪級數在嚴格位於該半徑之內的每一個閉區間上都一致收斂（converges uniformly）。這是大學一年級分析學（analysis）的標準結果，也正因如此，「不必考慮收斂問題」這句話在這裏是穩妥的。指數並非整數的二項級數（binomial series），正是這一類冪級數。Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析學入門教材）對一致收斂和冪級數有清晰的講解。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。