詳細解答

STEP III 1989，第 8 題

純數學 • 耦合微分方程

> **STEP III 1989，第 8 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q8

關鍵思路

第一條方程把 y 用 x 和 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 表示出來。因此只要把它再微分一次，出現的 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 就可以用第二條方程代換，y 便完全消失。剩下的是一條二階常係數線性方程（second-order linear equation with constant coefficients）。它的輔助方程（auxiliary equation）有重根（repeated root），而其中一個強迫項（forcing term）正好與這個根吻合。這種共振（resonance）才是本題真正的考驗。

解答

消去 y

以字母上方的點表示對 t 的導數。把 $\dot{x} = 4(x - y)$ 微分，得

$$\ddot{x} = 4\dot{x} - 4\dot{y} = 4\dot{x} - 4x + 48\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right),$$

其中 $\dot{y}$ 用了第二條方程代入。因此

$$\boxed{\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 48\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right),}$$

式中不含 y。

求解 x

餘函數（*complementary function*）。輔助方程 $m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$ 有重根 $m = 2$，所以餘函數是

$$x_{\mathrm{c}} = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{2t}.$$

特別積分（*particular integral*）。由於方程是線性的，我們可以把兩個強迫項逐一處理。

對於 $48\mathrm{e}^{-2t}$，試用 $x = D\mathrm{e}^{-2t}$。代入後得 $D(4+8+4)\mathrm{e}^{-2t} = 48\mathrm{e}^{-2t}$，所以 $D = 3$。

> ? **想一想** 對於 $48\mathrm{e}^{2t}$ 這一項，為甚麼 $C\mathrm{e}^{2t}$ 行不通，甚至連 $Ct\,\mathrm{e}^{2t}$ 也行不通？

e^{2t} 和 $t\,\mathrm{e}^{2t}$ 都已經在餘函數之中，所以方程左邊會把它們變成 0。因為 2 是二重根，我們必須升到 $t^2\mathrm{e}^{2t}$。試用 $x = Ct^2\mathrm{e}^{2t}$。一個簡潔的代入方法是寫成 $x = u\,\mathrm{e}^{2t}$。這樣

$$\dot{x} = (\dot{u} + 2u)\mathrm{e}^{2t}, \qquad \ddot{x} = (\ddot{u} + 4\dot{u} + 4u)\mathrm{e}^{2t},$$

所以

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = \ddot{u}\,\mathrm{e}^{2t}.$$

取 $u = Ct^2$，上式便是 $2C\mathrm{e}^{2t}$，所以 $2C = 48$，即 $C = 24$。（這個代換同時說明了為甚麼餘函數是 $(A + Bt)\mathrm{e}^{2t}$：我們需要 $\ddot{u} = 0$。）

因此通解（general solution）是

$$x = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{2t} + 24t^2\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t}.$$

初始條件（*initial conditions*）。題目只給出 $x(0) = 0$ 和 $y(0) = 0$。二階方程還需要 $\dot{x}(0)$，而原來的第一條方程正好提供了它：$\dot{x}(0) = 4(x(0) - y(0)) = 0$。

由 $x(0) = 0$ 得 $A + 3 = 0$，所以 $A = -3$。微分得

$$\dot{x} = (B + 2A + 2Bt + 48t + 48t^2)\mathrm{e}^{2t} - 6\mathrm{e}^{-2t},$$

所以 $\dot{x}(0) = B + 2A - 6 = 0$，得 $B = 12$。因此

$$\boxed{x = \left(24t^2 + 12t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t}.}$$

求 y

不必再解另一條微分方程，因為第一條方程給出 $y = x - \frac{1}{4}\dot{x}$。代入 $A = -3$ 和 $B = 12$，

$$\dot{x} = \left(48t^2 + 72t + 6\right)\mathrm{e}^{2t} - 6\mathrm{e}^{-2t},$$

所以

$$\begin{aligned} y &= \left(24t^2 + 12t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + 3\mathrm{e}^{-2t} - \left(12t^2 + 18t + \tfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-2t} \\ &= \left(12t^2 - 6t - \tfrac{9}{2}\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}. \end{aligned}$$

即

$$\boxed{y = \tfrac{3}{2}\left(8t^2 - 4t - 3\right)\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2t}.}$$

驗算

- 當 $t = 0$ 時：$y(0) = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 0$。這個條件從未直接用上，所以這是一項真正的驗算。
- 第二條方程我們只用來消去 y，它也應該成立。微分得

$$\dot{y} = \left(24t^2 + 12t - 15\right)\mathrm{e}^{2t} - 9\mathrm{e}^{-2t},$$

而

$$x - 12\left(\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2t}\right) = \left(24t^2 + 12t - 15\right)\mathrm{e}^{2t} - 9\mathrm{e}^{-2t}.$$

兩者相符。

- 數值方面，用龍格—庫塔法（Runge–Kutta method）由 $(0,0)$ 出發逐步推算原來的方程組，得 $x(1) \approx 244.2449$ 和 $y(1) \approx 11.6926$。公式給出 $33\mathrm{e}^2 + 3\mathrm{e}^{-2}$ 和 $\frac{3}{2}\mathrm{e}^2 + \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2}$，數值與上述結果相同。

常見錯誤

- 對共振項試用 $Ct\,\mathrm{e}^{2t}$。根 2 是重根，所以我們需要 $t^2\mathrm{e}^{2t}$。
- 看不出第二個初始條件從何而來。$\dot{x}(0) = 0$ 這個值隱藏在第一條方程之中，再配合 $x(0) = y(0)$ 便可得出。
- 另外為 y 解一條二階方程。這樣會引入兩個新常數，之後還要把它們與 x 配對。利用 $y = x - \frac{1}{4}\dot{x}$ 便可避免這個麻煩。

STEP 之外

消去 y 是解線性方程組（linear system）的其中一種方法。大學的做法是把它寫成 $\dot{\mathbf{v}} = M\mathbf{v} + \mathbf{f}(t)$，其中 $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。這裏 M 有重特徵值（eigenvalue）2，但只有一個特徵向量（eigenvector），所以不能對角化（diagonalise），而 $t\,\mathrm{e}^{2t}$ 項正是由此而來。若爾當標準形（Jordan normal form）和矩陣指數（matrix exponential）e^{Mt} 可以把這一點說得精確。Boyce 與 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入門教科書）涵蓋線性方程組，包括重特徵值的情況。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。