詳細解答

STEP III 1989，第 7 題

純數學 • 錯切矩陣

> **STEP III 1989，第 7 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q7

關鍵思路

用兩個單位向量（unit vector）來處理，一切都最簡單：$\mathbf{u}$ 沿直線 $L\colon y = x\tan\alpha$ 的方向，而 $\mathbf{n}$ 與它垂直。這個錯切（shear）把每一點沿平行於 $\mathbf{u}$ 的方向移動，移動量與該點到 L 的有向距離（signed distance）成正比，所以 $\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\,\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$。至於第二部分，一個矩陣與 $\mathbf{I} + k\mathbf{A}$ 可交換（commute），當且僅當它與 $\mathbf{A}$ 可交換，這樣便可撇除一切枝節。

解答

記 $s = \sin\alpha$ 及 $c = \cos\alpha$。由於 α 是銳角，故 $s > 0$ 且 $c > 0$。設

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix},$$

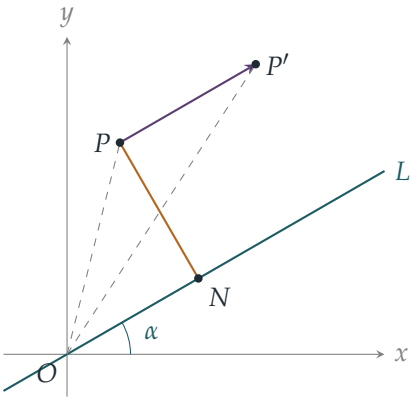
則 $\mathbf{u}$ 是沿 L 方向、與 x 軸成角 α 的單位向量，而 $\mathbf{n}$ 是指向 L 左上方一側的單位法向量（unit normal）。

求 M

對於 $P = (x, y)$，設

$$d = \mathbf{n}\cdot\overrightarrow{OP} = y\cos\alpha - x\sin\alpha,$$

即由 P 到 L 的有向距離。於是 $PN = |d|$，而 $d > 0$ 當且僅當 P 位於 L 的上方。



取 P 在 L 的上方，故 $d > 0$。由 (i)，$\overrightarrow{PP'}$ 沿 $\mathbf{u}$ 的方向，所以 $\overrightarrow{PP'} = \lambda\mathbf{u}$，其中 $\lambda > 0$。條件 (ii) 與此相符：二維叉積（cross product）為

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} \times (\overrightarrow{OP} + \lambda\mathbf{u}) = \lambda\,(xs - yc) = -\lambda d < 0,$$

所以由 OP 轉到 OP' 是順時針方向，符合要求。條件 (iii) 給出 $\lambda = k\,PN = kd$。（要這些條件同時成立，必須有 $k > 0$。）因此，對於 L 上方的每一點 P，

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + kd\,\mathbf{u} = \overrightarrow{OP} + k\,\mathbf{u}\,(\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{OP}).$$

想一想 我們只用了 L 上方的點。為甚麼這樣已足以完全確定 $\mathbf{M}$？

T 是線性（linear）的，而映射 $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} + k\,\mathbf{u}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})$ 也是線性的。兩者在 L 上方的開半平面（open half-plane）上一致，而這個半平面包含兩個線性獨立（linearly independent）的向量（例如 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{n} + \mathbf{u}$）。兩個線性映射若在一組基（basis）上一致，便完全相等。所以對於所有向量，

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\,\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \mathbf{I} + k\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s & c \end{pmatrix} = \mathbf{I} + k\begin{pmatrix} -sc & c^2 \\ -s^2 & sc \end{pmatrix}.$$

亦即

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 - k\sin\alpha\cos\alpha & k\cos^2\alpha \\ -k\sin^2\alpha & 1 + k\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix},$$

正如所求。作為合理性檢查，由 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ 得 $\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{u}$，所以 L 上每一點都固定不動。此外 $\det\mathbf{M} = 1 - k^2s^2c^2 + k^2s^2c^2 = 1$，正是錯切應有的行列式（determinant）值。

可交換的條件

設 $\mathbf{A} = \mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} -sc & c^2 \\ -s^2 & sc \end{pmatrix}$ 及 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix}$。由於 $\mathbf{M} = \mathbf{I} + k\mathbf{A}$，而 $\mathbf{I}$ 與任何矩陣都可交換，

$$\mathbf{XM} - \mathbf{MX} = k(\mathbf{XA} - \mathbf{AX}).$$

因為 $k \neq 0$，$\mathbf{X}$ 與 $\mathbf{M}$ 可交換，當且僅當它與 $\mathbf{A}$ 可交換。乘開得

$$\mathbf{XA} = \begin{pmatrix} -psc - qs^2 & pc^2 + qsc \\ -rsc - ts^2 & rc^2 + tsc \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{AX} = \begin{pmatrix} -psc + rc^2 & -qsc + tc^2 \\ -ps^2 + rsc & -qs^2 + tsc \end{pmatrix},$$

所以

$$\mathbf{XA} - \mathbf{AX} = \begin{pmatrix} -(qs^2 + rc^2) & -c^2(t-p) + 2qsc \\ -s^2(t-p) - 2rsc & qs^2 + rc^2 \end{pmatrix}.$$

這個矩陣為零，當且僅當

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad qs^2 + rc^2 = 0, \\ &\text{(b)} \quad c^2(t-p) = 2qsc, \\ &\text{(c)} \quad s^2(t-p) = -2rsc. \end{aligned}$$

由於 $c \neq 0$，(b) 即 $t - p = 2q\tan\alpha$。由於 $s \neq 0$，(c) 即 $t - p = -2r\cot\alpha$。

> ? **想一想** 這裏有三條方程，但題目所述的條件只包含兩條。(a) 到哪裏去了？

它可由另外兩條推出。若 $2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha$，兩邊乘以 $\frac{1}{2}sc$ 便得 $qs^2 = -rc^2$，這正是 (a)。所以

$$\mathbf{XM} = \mathbf{MX} \iff t - p = 2q\tan\alpha = -2r\cot\alpha.$$

兩個方向都成立：以上每一步都是等價關係。這就是所求的充分必要條件（necessary and sufficient condition）。

驗算

- 取 $\alpha = \frac{\pi}{4}$、$k = 2$，得 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$。點 $(0,1)$ 位於 $y = x$ 上方，距離為 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，它被移到 $(1,2)$。這是沿 $45°$ 方向移動了 $\sqrt{2} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$，而且轉向是順時針的。
- $\mathbf{X} = \mathbf{M}$ 本身滿足這個條件：$t - p = 2ksc$，$2q\tan\alpha = 2kc^2 \cdot \frac{s}{c} = 2ksc$，以及 $-2r\cot\alpha = 2ks^2 \cdot \frac{c}{s} = 2ksc$。$\mathbf{I}$ 也滿足這個條件，三個式子都等於零。
- 以數值方法檢驗：隨機選取 α、k 和 L 上方的 P，$\mathbf{M}$ 都重現了 (i)–(iii)。滿足條件的隨機矩陣與 $\mathbf{M}$ 可交換，誤差在 10^{-8} 之內；不滿足條件的隨機矩陣則不可交換。

常見錯誤

- 對每一點都使用不帶正負號的距離 PN。位移是有向距離的 k 倍。L 下方的點向相反方向移動，正因如此 T 才是線性的。
- 就可交換的條件只證明了「若」（或只證明了「僅若」）的方向，或忘記說明 $(1,1)$ 元素並沒有帶來新的條件。

STEP 之外

這裏與 $\mathbf{M}$ 可交換的矩陣，恰好就是形如 $a\mathbf{I}+b\mathbf{A}$ 的矩陣：請驗證 $t-p=2q\tan\alpha=-2r\cot\alpha$ 是一個雙參數族。這是一個一般事實的特例。對於一個不是 $\mathbf{I}$ 的倍數的 2×2 矩陣，與它可交換的矩陣恰好就是 $a\mathbf{I}+b\mathbf{M}$。對於 $n\times n$ 矩陣，當最小多項式（minimal polynomial）等於特徵多項式（characteristic polynomial）時，相應的結論（可交換的矩陣都是 $\mathbf{M}$ 的多項式）成立。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（線性代數入門教材）闡述了秩一矩陣（rank-one matrix）$\mathbf{u}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ 以及這背後的思想。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。