詳細解答

STEP III 1989，第 6 題

純數學 • 圓錐曲線的極坐標方程

> **STEP III 1989，第 6 題**
>
> 繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：
>
> step.maths.org/questions/89-s3-q6

關鍵思路

在極坐標（polar coordinates）中，一條不經過原點的直線的 $1/r$ 等於 $\cos\theta$ 與 $\sin\theta$ 的組合，而把它寫成 $A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$，就可以與圓錐曲線（conic）本身的 $\cos\theta$ 項完全配對。只要 $e\cos\theta$ 的部分一致，弦（chord）的方程便只需處理單獨一個餘弦項，其餘的就交給關於 $\theta=\gamma$ 的對稱性。讓弦收縮成一點便得到切線（tangent），而有了切線方程，平分線（bisector）性質幾乎是自動得出的。

解答

全文之中，(r,θ) 為極坐標，其中 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，並且容許 $r<0$（點 (r,θ) 與 $(-r,\theta+\pi)$ 是同一點）。圓錐曲線的焦點（focus）S 位於原點。

直線的極坐標形式

由於 $lx+my=1$ 不可能經過原點，直線上 $r\neq 0$，兩邊除以 r 得

$$\frac{1}{r} = l\cos\theta + m\sin\theta.$$

把題目建議的形式展開，

$$A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma) = (A + B\cos\gamma)\cos\theta + B\sin\gamma\,\sin\theta.$$

若 $B\sin\gamma = m$ 及 $A + B\cos\gamma = l$，兩式便對所有 θ 都相等。由於 $\sin\gamma\neq 0$，可取

$$B = \frac{m}{\sin\gamma}, \qquad A = l - m\cot\gamma,$$

這就是所求的極坐標方程。反過來說，任何方程 $1/r = A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$，只要 A、B 不會令兩個係數同時為零，都是一條直線 $lx+my=1$，其中 $l = A + B\cos\gamma$，

$m = B\sin\gamma$。留意這個形式在 $(r,\theta) \to (-r,\theta+\pi)$ 之下保持不變，所以無論 r 取哪個符號，它描述的都是整條直線。

弦 PQ

設弦的方程具有 $a/r = A\cos\theta + B\cos(\theta-\gamma)$ 的形式。在 P 和 Q 處有 $\theta = \gamma \mp \delta$ 及 $a/r = 1 + e\cos\theta$，所以我們需要

$$A\cos(\gamma\mp\delta) + B\cos(\mp\delta) = 1 + e\cos(\gamma\mp\delta).$$

因為對兩點而言都有 $\cos(\mp\delta) = \cos\delta$，取 $A = e$，$B\cos\delta = 1$ 便可同時滿足兩條方程，而 $\cos\delta \neq 0$ 保證可以解出 B。兩個相異的點確定一條直線，所以弦 PQ 為

$$\boxed{\frac{a}{r} = e\cos\theta + \sec\delta\,\cos(\theta-\gamma).}$$

（若 $\cos\delta = 0$，則 P 和 Q 位於 $\theta = \gamma \mp \frac{\pi}{2}$，而 PQ 是一條焦弦（focal chord）；經過原點的直線沒有 $1/r = \ldots$ 這種形式的方程，這就是該情況被排除的原因。）

想一想 我們怎樣知道這條弦只在 P 和 Q 與圓錐曲線相交？

對每個 θ，圓錐曲線上恰有一點，滿足 $a/r = 1 + e\cos\theta$。弦經過該點，當且僅當 $1 + e\cos\theta = e\cos\theta + \sec\delta\cos(\theta-\gamma)$，即 $\cos(\theta-\gamma) = \cos\delta$，所以 $\theta = \gamma \pm \delta$。$e\cos\theta$ 項互相抵消，這正是選取 $A = e$ 的用意所在。

在 $\theta = \gamma$ 處的切線

設 $\theta = \gamma$ 所對應的點為 G，該點的切線就是當 P 和 Q 向 G 靠攏時，亦即 $\delta \to 0$ 時，弦 PQ 的極限。弦的方程連續地依賴於 δ，而 $\sec\delta \to 1$，所以切線為

$$\boxed{\frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta-\gamma).}$$

作為印證，這條直線與圓錐曲線相交於 $\cos(\theta-\gamma) = 1$ 之處，即只在 G 相交，切線理應如此。更具決定性的驗證是：切線的直角坐標（cartesian）形式為 $(e+\cos\gamma)x + (\sin\gamma)y = a$，其法向量（normal vector）為 $(e+\cos\gamma,\ \sin\gamma)$。圓錐曲線為 $r = a - ex$；沿曲線求微分得 $(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)/r = -e\,\mathrm{d}x$，即 $(e + x/r)\,\mathrm{d}x + (y/r)\,\mathrm{d}y = 0$。在 G 處，$x/r = \cos\gamma$ 及 $y/r = \sin\gamma$，所以曲線在該處的法向量正是同一個向量。

最後一部分

把焦點 S 置於原點，圓錐曲線便是 $a/r = 1 + e\cos\theta$，並設 L 和 M 分別為 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \beta$ 所對應的點。記

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta), \qquad \delta = \tfrac{1}{2}(\beta-\alpha),$$

於是 L 和 M 位於 $\theta = \gamma - \delta$ 和 $\gamma + \delta$，與上文的 P 和 Q 完全一樣。根據上一個結果，在 L 和 M 處的切線分別為

$$\frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha), \qquad \frac{a}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \beta).$$

在 T 處兩式同時成立，所以 $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta - \beta)$。因此，要麼 $\theta - \alpha = \theta - \beta + 2k\pi$，這會令 $L = M$；要麼

$$\theta - \alpha = -(\theta - \beta) + 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad \theta = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) + k\pi = \gamma + k\pi.$$

所以 T 位於經過 S、方向為 $\theta = \gamma$ 的直線上，且

$$r_T = \frac{a}{e\cos\gamma + \cos\delta}$$

（兩條切線平行、T 不存在的情況，恰好是 $e\cos\gamma + \cos\delta = 0$ 之時）。

射線 SL 和 SM 分別指向 $\alpha = \gamma - \delta$ 和 $\beta = \gamma + \delta$ 的方向（這裏取通常的情況，即在 L 和 M 處 $r > 0$，橢圓（ellipse）或拋物線（parabola）便是如此）。直線 $\theta = \gamma$ 與兩條射線所成的角都是 δ，所以直線 ST 平分角 LSM。（若 $r_T < 0$，則 T 位於反方向的射線上，ST 平分的是優角（reflex angle）LSM；角 LST 與角 MST 仍然相等。）

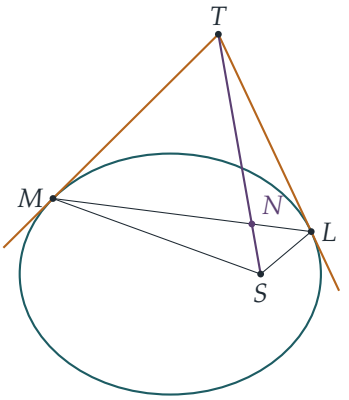
要找出 ST 與 LM 的交點，把該點稱為 N。弦 LM 為 $a/r = e\cos\theta + \sec\delta\cos(\theta - \gamma)$，而在 ST 上有 $\theta = \gamma$，所以

$$\frac{a}{SN} = e\cos\gamma + \sec\delta \quad \Longrightarrow \quad SN = \frac{a\cos\delta}{1 + e\cos\gamma\cos\delta}.$$

利用 $2\cos\gamma\cos\delta = \cos(\gamma - \delta) + \cos(\gamma + \delta) = \cos\alpha + \cos\beta$，上式即

$$\boxed{N \text{ 位於} \theta = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad r = \frac{2a\cos\frac{1}{2}(\beta - \alpha)}{2 + e\cos\alpha + e\cos\beta}.}$$

當 LM 是焦弦（$\cos\delta = 0$）時，這給出 $N = S$，正如所料。



驗算

- 試試圓的情況（$e = 0$，半徑為 a）：切線變成 $a/r = \cos(\theta - \gamma)$，即 $x\cos\gamma + y\sin\gamma = a$，正是 $x^2 + y^2 = a^2$ 為人熟悉的切線。
- 三角形 LSM 中的角平分線定理（angle bisector theorem）指出 $LN : NM = SL : SM$。取 $a = 1.5$，$e = 0.6$，$\alpha = 40°$，$\beta = 160°$（即圖中的情況），得 $SN \approx 0.791$，而該比例經數值驗算後成立。
- 我們用電腦在數以千計隨機選取的圓錐曲線和點上，測試了弦與切線的方程、ST 的方向、兩角相等的性質，以及 SN 的公式。

常見錯誤

- 解 $\cos(\theta - \alpha) = \cos(\theta - \beta)$ 時只取 $+$ 號。這個分支得不出任何結果（它需要 $\alpha = \beta$），有用的解來自 $-$ 號。
- 沒有善用 A 的選擇自由：取 $A = e$，才能令 $e\cos\theta$ 項在與圓錐曲線求交點時互相抵消。

STEP 之外

ST 平分 $\angle LSM$ 這個結果，是圓錐曲線一個經典的焦點性質，而直線 LM 則是 T 關於該圓錐曲線的極線（*polar*）。極點與極線的對偶（pole–polar duality）是通往射影幾何（projective geometry）的大門；在射影幾何中，所有非退化的圓錐曲線都是等價的，相切與關聯都變成純粹的代數關係。Brannan、Esplen 與 Gray 合著的 *Geometry*（《幾何學》）是一本很好的大學一年級程度讀物，講述圓錐曲線與射影幾何。

Beyond STEP 詳細解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/。解答文字採用 CC0 1.0；題目本身版權屬 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予轉載。由機器從英文翻譯而成；尚未經審閱。